JOSE MANUEL RISQUEZ

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LA DOBLE PROYECCION ORTOGONAL

Una Interpretación Alternativa del problema de la Representación Gráfica.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE COMUNICACION VISUAL

2a. Edición
Mérida, Venezuela
Junio de 1996

CONTENIDO

PRESENTACION I

---

1. INTRODUCCION 1
2. LA GEOMETRIA 6
3. LOS SISTEMAS DE PROYECCION GRAFICA. LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA. 12
4. EL SISTEMA DIEDRICO. DOBLE PROYECCION ORTOGONAL 21
   - EL ESPACIO EN EL SISTEMA DIEDRICO. 28
   - LOS MÉTODOS EN LA DOBLE PROYECCION ORTOGONAL 37
     - VISTAS MULTIPLES. CAMBIO DE PLANOS 39
   - CUESTIONARIO 50
5. EL PUNTO 51
   - CUESTIONARIO 56
6. LA RECTA 57
   - VERDADERO TAMAÑO DE UN SEGMENTO Y ÁNGULOS CON LOS PLANOS DE PROYECCION 58
   - POSICIONES PARTICULARES DE LA RECTA 59
   - DETERMINACION DEL VERDADERO TAMAÑO DE UN SEGMENTO, Y DETERMINACION DE LOS ÁNGULOS QUE FORMA CON LOS PLANOS DE PROYECCION 72
     - CAMBIO DE PLANOS 73
     - GIRO DE LA RECTA 78
     - TRIANGULOS DE REBATIMIENTO 81
   - TRAZAS DE LA RECTA 82
   - PROYECCIONES DE UN SEGMENTO CONOCIDOS SUS ÁNGULOS "α" y "β" CON LOS PLANOS DE PROYECCION 86
   - CUESTIONARIO 96

7. EL PLANO 99

NOMENCLATURA 99

BAJO CUALES FORMAS SE PRESENTA UN PLANO EN EL ESPACIO? 100

TRAZAS DEL PLANO 103

ANGULOS DEL PLANO CON LOSPLANOS DE PROYECCION 105

RECTA DE MAXIMA PENDIENTE 106

RECTA DE MAXIMA INCLINACION 107

POSICIONES PARTICULARES DEL PLANO 108

RECTAS Y PUNTOS CONTENIDOS EN EL PLANO 121

RECTAS CARACTERISTICAS DEL PLANO 125

DETERMINACION DE LAS TRAZAS DEL PLANO MEDIANTE LAS RECTAS CARACTERISTICAS 126

VERDADERO TAMAÑO Y CONSTRUCCION DE FIGURAS PLANAS 128

REBATIMIENTO 128

HOMOLOGIA 134

CAMBIO DE PLANOS 137

CUESTIONARIO 151

8. RELACIONES GEOMETRICAS 153

INTERSECCIONES 154

INTERSECCION ENTRE RECTAS 154

INTERSECCION ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO 156

Cambio de Planos 158

Plano Proyectante (Recta Tapada) 159

INTERSECCION DE PLANOS 160

VISIBILIDAD 164

PARALELISMO 166

PARALELISMO ENTRE RECTAS 166

PARALELISMO ENTRE RECTAS Y PLANOS 167

PARALELISMO ENTRE PLANOS 168

PERPENDICULARIDAD Y ORTOGONALIDAD 170
PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO 171
PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS 173
PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS 177

RELACIONES PARTICULARES ENTRE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS 179

DISTANCIAS 180
Distancia entre dos puntos 180
Distancia entre un punto y una recta 180
Distancia entre un punto y un plano 186
Distancia entre una recta y un plano. Distancia entre dos planos 188
Distancia entre dos rectas paralelas 188
Distancia entre dos rectas que se cruzan. Perpendicular Común 189

ANGULOS 194
Angulo entre dos rectas 194
Angulo entre una recta y un plano 195
Angulo entre dos planos 198

LUGARES GEOMETRICOS 200
Determinación de las proyecciones de rectas que forman un ángulo conocido con uno de los planos de proyección y están contenidas en un plano dado 202

Determinación de las proyecciones de planos que pasando por una recta dada, forman ángulos conocidos con uno de los planos de proyección 208

CUESTIONARIO 216

9. POLIEDROS 218

SOLIDOS RECTOS Y OBLICUOS 218
PIRAMIDES RECTAS REGULARES 220
Secciones Típicas de la Pirámide 221

Proyecciones Notables de las Pirámides Rectas 223
PRISMAS RECTOS REGULARES 226
Secciones Típicas en Prismas Rectos 227
Proyecciones Notables de los Prismas Rectos 228
SÓLIDOS DE REVOLUCION 229
SÓLIDOS REGULARES 230
EL TETRAEDRO 231
Relaciones entre elementos semejantes del Tetraedro 231
Secciones Típicas del Tetraedro 232
Construcción de la Sección Principal 234
Posiciones Notables del Tetraedro 237
EL CUBO O HEXAEDRO 238
Relaciones entre elementos semejantes del Cubo 239
Secciones Típicas del Cubo 240
Construcción de la Sección Principal 242
Posiciones Notables del Cubo 243
CUESTIONARIO 247

10. ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONSTRUCCION DE POLIEDROS 249
EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 250
LAS VARIABLES CONSTRUCTIVAS 259
EL POLIEDRO SE MUEVE EN EL ESPACIO. GRADOS DE LIBERTAD 265

11. APENDICE I 271
12. APENDICE II 273
13. BIBLIOGRAFIA 275

PRESENTACION

Este Texto constituye un intento de recopilar y ordenar la mayor parte del material teórico conceptual básico que corresponde al primer curso de Geometría Descriptiva, el cual se dicta actualmente en el nivel básico de las carreras de Arquitectura e Ingeniería, en la Universidad de Los Andes, bajo los nombres de Sistemas de Representación 10 y Sistemas de Proyección 10 respectivamente.

Son numerosas las motivaciones que me han inducido a preparar este Texto, el cual responde la necesidad de dar un enfoque distinto a una materia que se ha impartido de la misma forma desde su incorporación a los estudios de las carreras mencionadas hace ya mas de 40 años y cuyo estatus, consecuentemente ha venido experimentando un progresivo deterioro dentro del plan curricular de la Facultad de Arquitectura como asignatura vital en la formación profesional, el cual se pone de relieve a traves de algunas evidencias como las que planteo a continuación:

1.- La indiferencia generalizada hacia la aplicabilidad de sus métodos y recursos en la interpretación, el análisis y la solución de problemas de diseño.

2.- El enfoque simplista al que se ha degradado el abordaje de los contenidos del programa, como ocurre por ejemplo con el tratamiento del cubo y del tetraedro (sólidos de una riqueza morfológica y estructural compartida por todos los poliedros regulares) como si fuesen respectivamente un prisma y una pirámide recta.

3.- La reducción compulsiva y sin respaldo conceptual de los contenidos temáticos de la materia, en íntima asociación a la exigua cantidad de tiempo al que se han constreñido los programas. A esta consideración no escapa el obviar el tratamiento de otros tópicos importantes del programa, y a ella -entre otras- se debe que de él se haya excluido el estudio del octaedro y el desarrollo de sólidos en el primer curso, y el estudio de la esfera y de las sombras en el Sistema Diédrico, en el segundo.

El ciego apego a las viejas y gastadas ideas que sirvieron de apoyo a los precursores del análisis gráfico para estructurar un modelo primario elemental del Sistema Diédrico, ha impedido, aún a la luz de las relaciones interactivas reales que se dan entre los protagonistas de la dialéctica perceptiva (observador y objeto), trascender las estrechas limitaciones supuestas por la estrecha versión de un espacio estático, ocupado por protagonistas inmóviles, dividido en cuatro sectores separados (cuadrantes) nacidos del encuentro de dos planos ortogonales de proyección -el vertical y el horizontal- los cuales lo congelan (al espacio) y lo convierten casi en un "objeto de laboratorio". La influencia de esta concepción primitiva, sustentada por una extensa bibliografía en la que el mas jóven de los ejemplares no tiene menos de 25 años, ha retrasado notablemente, sino estancado, la apertura de este prodigioso recurso a la descripción, análisis e interpretación de los atributos morfológicos de los objetos con los cuales compartimos el espacio físico y el imaginario.

Si bién, la proyección ortogonal, no revela los eventos tridimensionales con la fidelidad a la realidad que permiten las cónicas (de las cuales, la fotografía es su paradigma tecnológico), aquella nos enfrenta a nuevas interpretaciones de los objetos al permitirnos su representación desde puntos de vista que por estar infinitamente alejados nos sería imposible ocupar. De este modo, apoyada en un conjunto de postulaciones abstractas, nos ofrece una fuente de múltiples posibilidades para manipular la dinámica interactiva resultante del cambio contínuo de posición que experimenta un observador que percibe un objeto.

Es así que, el desarrollo del contenido de este trabajo se fundamenta en la consideración del papel protagónico que desempeña el observador como elemento principal en la estructura del sistema de proyección, pués no puede concebirse la existencia de las proyecciones si no hay un perceptor; una proyección no es otra cosa que la transferencia de la imágen que se imprime sobre la retina a una superficie plana.

Como consecuencia de ello, su presentación evoluciona haciendo uso en forma extensiva del Cambio de Planos como recurso de análisis de los distintos eventos geométricos tratados. Ello no me exime de considerar adicionalmente la aplicación de los procedimientos convencionales a los mismos casos, pués estimo que es imperativo poner a disposición del estudiante todo el rango de recursos existentes para abordar la resolución de los problemas.

Al mismo tiempo, el tratamiento de los tópicos expuestos intenta poner en evidencia la naturaleza esencial de los eventos tridimensionales, mediante su análisis tal como ocurren en su ámbito natural del espacio geométrico. Las explicaciones sobre los mismos profundizan detalladamente su razón de ser, y cuando el caso lo sugiere se extienden hasta el análisis comparativo de los procedimientos aplicables. La presentación extensiva de las imágenes espacial y diédrica insiste en la indisociable relación entre la realidad y su representación. El texto, aún durante el tratamiento de cuestiones conceptuales de cierto nivel de abstracción, se desarrolla en un estilo ligero y "amistoso" que apela reiteradamente a la primera persona del plural para intentar crear un ambiente cómodo y propicio de lectura, que permita al lector sentirse mas como un interlocutor que participa que como un espectador que observa.

La discusión de aquellos aspectos centrales que sirven de fundamento al cuerpo teórico del sistema diédrico, deviene en un análisis crítico que me lleva comparar los enfoques prevalentes en la conceptualización del Sistema Diédrico, es decir, los que representan a los llamados Sistema Europeo y Sistema Americano. Me interesa primordialmente insistir en el hecho de que la eficiencia de cualquier recurso está comprometida en primera instancia con su capacidad de verificarse en la práctica. Es a partir de allí que insisto en la conveniencia de simplificar la estructura del sistema de proyección solo con el fin de hacerlo mas eficiente. Es por ello que el funcionamiento del sistema compromete, como ya señalé, la presencia insustituible del observador como perceptor

de la realidad que analiza, y es a partir de esta presencia protagónica de donde se desprende el desarrollo de los procedimientos centrales propuestos por este trabajo.

Por otra parte, el trabajo considera la redefinición de algunos tópicos sobre los que la ausencia de respaldo conceptual ha dejado paso a la costumbre de tratarlos de una manera vaga e imprecisa. Así, se intenta ubicar en un contexto mas riguroso el concepto de Secciones Típicas y Posiciones Notables, en particular, en el ámbito de los poliedros. Igualmente se redefine el perfil de algunos otros conceptos apelando al rigor semántico, como en el caso del Rebatimiento.

En particular, la nomenclatura utilizada para identificar los cambios de plano y el concepto de Sección Triangular Máxima en el Cubo y su desarrollo exhaustivo en su análisis estructural, son aportes que introduje desde el inicio de mi labor docente en la materia, y que aparecieron publicados por primera vez en la "Guía N° 5", que integraba un material didactico compuesto por seis guías preparadas en el año 1974 con la colaboración de los profesores Raúl Lander y Edgard Guédez para uso de los cursos que en ese entonces estaban bajo nuestra responsabilidad. Asímismo, me atribuyo el desarrollo de dos procedimientos; uno para determinar la sección principal de un Tetraedro cuando se conoce la distancia entre dos de sus aristas opuestas y otro para construir un Pentágono conocida su altura, los cuales expuse oportunamente a mis colegas del Departamento, y que presento respectivamente en los apéndices I y II, al final del trabajo.

El capítulo final propone algunas estrategias que pueden simplificar considerablemente el proceso de análisis de los problemas de construcción de poliedros. Se intenta analizar la estructura del enunciado de los problemas, identificando, diferenciando y cualificando las variables que intervienen en él. Asímismo, se introduce la idea del movimiento del sólido en el espacio, segmentado por la restricción impuesta por las tres direcciones

ortogonales fundamentales, para lo cual emprestamos el concepto de "grados de libertad" al análisis estructural.

El contenido de este texto representa una segunda versión, ahora revisada, corregida y ampliada del que ya fué publicado como material de apoyo y consulta obligatoria para los estudiantes de las secciones a mi cargo en el semestre en curso. Los ejercicios prácticos correspondientes a aquellos capítulos que los requieren, por ahora forman parte de un texto separado que será incorporado a este material en su versión definitiva.

Todo el contenido ha sido revisado exhaustivamente con el fin de corregir eventuales errores en el texto y los gráficos, lo cual no necesariamente lo exime de ellos. Por ello estaré agradecido ante cualquier sugerencia en beneficio de su mejor presentación, lo cual en última instancia redundará en beneficio de quienes son sus últimos receptores y fueron motivo central de este trabajo: los estudiantes.

El Autor.

Mérida, 8 de mayo de 1995

INTRODUCCION.

En tiempos remotos, cuando la inteligencia brilló por vez primera en la mente del hombre, su relación consigo y con su medio se transformó de una manera dramática, pues la solución de sus problemas de subsistencia dejó de depender exclusivamente de los mandatos impresos genéticamente en su repertorio instintivo. Al despertar a la luz del intelecto, atraviesa el umbral que lo separaría definitivamente de sus ancestros y nace a la vida racional; toma conciencia de sí mismo y del mundo que le rodea; comienza a actuar por su propia voluntad, transformando el entorno inmediato para su propio beneficio, es decir, para adaptarlo a sus propias necesidades.

A medida que el hombre avanza en esta aventura, enfrenta problemas cada vez más complejos, que no puede resolver con los pocos instrumentos que, hasta ahora, su razón le ha permitido acopiar. No es ya una fiera, a merced del poder de los elementos y de sus enemigos naturales, expuesta inexorablemente a su destino animal. Debe ingeniar formas nuevas, artificios, para subsistir y preservarse. Ante los nuevos desafíos que el medio le impone, es imperativo encontrar formas de continuar existiendo, pues es un mandato natural sembrar y preservar la vida. Así, un nuevo recurso entra en juego: el poder de razonar. Ahora observa, reflexiona, comprende y entra en acción, es decir, obtiene conclusiones a partir de sus observaciones y dá respuestas concretas a sus problemas. Esta dinámica elemental le acompañará en adelante.

Sin embargo, no siempre los mismos problemas pueden ser resueltos con los mismos recursos. Cruzar un rio a nado para huir de sus enemigos, o para buscar alimentos, es imposible cuando las aguas se enfurecen. Es probable que despues

de múltiples fracasos, de muchos intentos vanos, seguramente de muchas vidas perdidas, haya construído un puente, un puente seguro. Ya habría comprendido la naturaleza del soporte estructural y podía realizar empalmes elementales. Aunque no supiera nada de cálculos, la intuición y la experiencia le habían asistido para encontrar una forma novedosa de salvar el ímpetu fluvial.

Ya sería capaz de pensar en un orden lógico. Podía hacer uso ordenado de los materiales a su disposición y construir estructuras eficientes; había inventado herramientas, ya se había agrupado en comunidades socialmente estructuradas, poseía el conocimiento y la experiencia que le permitirían enfrentar, con riesgos cada vez menores, retos cada vez mayores y mas complejos. Había desarrollado una tecnología.

Comprender la naturaleza de los problemas y darles solución es tarea complicada si no se tienen medios para interpretarlos. La realidad se presenta desordenada e incoherente, avasallante y sorpresiva, en fin, caótica: el trueno que aturde, el rayo que fulmina, la tormenta que enfurece los mares y desborda rios y lagunas, las inundaciones que arrasan cuanto encuentran a su paso, los vendavales y los huracanes que arrancan los árboles de raíz y mueven rocas inmensas con furia nunca vista; el infierno de los volcanes, la fragilidad del suelo que pisa y la suya misma cuando en el seno de la tierra se revuelven sus entrañas y se estremece arruinando su obra, las ventiscas, los tornados, los aludes, el frio, las fieras, las enfermedades, el desasosiego, la incertidumbre, el dolor, la muerte.....

El instinto no es suficiente para responder al fárrago de dificultades simultáneas que cada nueva situación presenta. No hay cabida para las soluciones simples a que estaba habituado. Su mente no puede comprender la totalidad así, de un solo golpe, y para asimilarla tiene que reducirla a una escala acorde con su capacidad

de entendimiento. Así es que la desmembra, la disocia, la separa y ordena en sus componentes más simples.

De este modo, el hombre conceptualiza la realidad objeto de su atención en términos de lo que es importante para él. Se dice entonces que la abstrae, es decir, la aisla de su contexto y considera sus componentes en forma separada, haciendo caso omiso de la totalidad a la que pertenecen. Este proceso le permite, como ya anotamos, reducirla a una escala en que le sea comprensible, manipulable; y —como un niño que desarma un juguete para escudriñar sus entrañas y descubrir, cuales son las causas que lo hacen funcionar— la separa, pieza por pieza, para tratar de entender la función particular que aisladamente desempeña cada uno de sus componentes. Su inteligencia, al cabo, lo devuelve —en un juego dialéctico— a concretar lo comprendido, y a través de una labor de síntesis, regresa -ya cargado de respuestas- al principio de su búsqueda para verificar en el orígen de su motivación a indagar, la correspondencia entre las partes que descubrió y el todo del que las separó. Compara ahora sus hallazgos al cobijo de aquella totalidad y acierta a responder sus interrogantes iniciales. Ha logrado explicarse lo que ignoraba, ...ha conciliado sus dudas con sus descubrimientos, ...ha —en fin— aprendido.

De esta manera, cuando vuelve a enfrentar situaciones semejantes, emergen imágenes recurrentes de su experiencias anteriores: lo aprendido se dibuja en algún rincón de su mente, ... es capaz de recordar, ...tiene memoria ! Puede utilizar esas imágenes —su experiencia— en el manejo de nuevas situaciones. Ya no es un simple espectador que capta la realidad exterior, sino un protagonista inmerso en ella, que puede actuar racionalmente sobre ella y modificarla a su antojo. Es así que desarrolla un poder que lo diferencia del resto de los seres

vivientes, y que progresivamente le otorgará supremacía y dominio sobre su entorno: el poder de crear.

Este proceso evolutivo pone al hombre en situación de aproximarse a la realidad con los poderosos recursos de la razón; crea el lenguaje, elabora teorías, métodos, conceptos; replica —simula— situaciones de la realidad, de modo que al cabo termina por edificar una estructura abstracta —la ciencia— a través de cuyo intermedio establecerá de ahora en adelante sus relaciones con su entorno. Ella, así como le ayudará a interpretar los eventos que no puede comprender directamente, le permitirá tambien manejarlos en forma creativa y evolucionar en sus relaciones con su contexto.

Es así como, con la ciencia a su servicio, se aproxima a los desafíos que lo acechan; con un arsenal de teorías, conceptos y métodos, que cuando no son útiles porque no se adaptan a la naturaleza de sus objetivos, son reinterpretados de acuerdo a las particulares cualidades de los problemas que desea resolver, y en función de la certidumbre de los resultados que desea obtener. La historia de la Física, por citar un área del conocimiento humano, está llena de impresionantes teorías sobre el universo. Unas más, otras menos, explican su estructura y evolución, mas aún siguen siendo inciertas las respuestas a su duda fundamental, a esa interrogante central que ni siquiera con la ayuda de la Filosofía, ha podido descifrar: ¿de dónde venimos?. No nos corresponde, por supuesto, internarnos en esa intrincada selva; pero es relevante entender, cuán importante es disponer de un cuerpo teórico para aproximarse a la realidad, sea esta tan simple como estudiar la Geometría Descriptiva, o tan compleja como indagar sobre el orígen del hombre y el universo.

De este modo, cada área de conocimiento —aunque pueda nutrirse de las fuentes más diversas— aborda sus propios problemas con recursos que se ajustan a sus particulares necesidades; tanto más cuanto mejor garanticen no solo su correcta interpretación, sino tambien la fluidez y seguridad de las vías que conducen a su solución correcta, y a la expresión más precisa y explícita de sus resultados.

Esos recursos son, así particularizados, instrumentos imprescindibles para observar, analizar, interpretar, evaluar, comprender, manejar, modificar y comunicar; en fin, para conocer una realidad determinada o un aspecto particular de ella, y poder actuar creativamente para modificarla en nuestro beneficio común.

El objeto de nuestro estudio, la Geometría Descriptiva y en particular la Doble Proyección Ortogonal, constituye uno de estos recursos, y su razón de ser reside precisamente en su utilidad para simular la realidad física y permitir su manipulación a través de elementos que la expresan. Ella es un instrumento sistemáticamente estructurado para representar, analizar, interpretar, describir y comunicar una variedad importante de cualidades inherentes a los objetos materiales que comparten con nosotros el espacio que habitamos.

LA GEOMETRIA.

La geometría [1], dentro de los límites del espacio euclidiano [2], conforma un extenso cuerpo de conocimientos, orientados al estudio de las cualidades morfológicas, de las relaciones y de la extensión de los cuerpos físicos y sus elementos constituyentes.

El universo de los principios básicos, de los conceptos fundamentales y de los procedimientos gráficos de la geometría plana elemental —como está concebido en los respectivos programas de toda la enseñanza preuniversitaria— constituye un insoslayable requisito de apoyo para proseguir el estudio de la geometría del espacio que invariablemente forma parte de los programas de todas las carreras técnicas. La experiencia en las aulas universitarias demuestra, no obstante, que su estudio en los niveles precedentes no reviste la importancia que su razón de ser implica. Sin hacer de ello una generalización, tal parece que la misma educación preuniversitaria, en lugar de descubrirnos la ubicuidad de esta ciencia milenaria y mostrarnos su utilidad para resolver los nuevos enigmas que emergen constantemente a nuestro paso, nos ha puesto en guardia contra ella, llevándonos a ignorar sus valiosos legados.

La geometría pone a nuestro alcance los instrumentos para comprender, no solo la extraordinaria perfección de las estructuras de la naturaleza y por tanto su belleza, sino —en un contexto mas inmediato— las relaciones entre los cuerpos físicos que ocupan el mismo espacio que habitamos (muchos de los cuales serán objeto de

[1] GEOMETRIA. El Pequeño Diccionario Larousse define la Geometría como la *Ciencia que tiene por objeto el estudio de la extensión considerada bajo sus tres dimensiones: línea, superficie y volumen .*

[2] Espacio finito.

nuestro trabajo profesional) y, al mismo tiempo, las relaciones intrínsecas entre los elementos que los constituyen.

No existe objeto del mundo físico, sea ese natural o artificial, que escape a los dominios de la geometría. La geometría es el principio ordenador del universo, y está presente en todos los eventos donde la realidad toma forma material. ¿Quién puede acaso señalar tan solo un objeto del mundo físico que no se le someta? Basta pensar que para explicar la morfología y la estructura de la materia en su mas infinitesimal expresión —el átomo— la geometría es imprescindible, así como tambien lo es cuando nos trasladamos a la infinitud del espacio interestelar.

Solo con el fin de ubicarnos mas apropiadamente en el territorio que vamos a explorar, y también con el de ilustrarnos un poco acerca de su origen, vamos a recrear un poco su historia.

El nacimiento de la geometría está estrechamente arraigado al de la matemática[3], y sabiendo que es de esta última de la cual se tienen las mas remotas informaciones, puede inferirse que la geometría surge una vez que existe un conocimiento matemático lo suficientemente elaborado que le sirva de sustento. No obstante, es seguro que ambas crecieron y se desarrollaron en una relación de dependencia y soporte mutuo.

Aunque la matemática como una disciplina del razonamiento, independiente y sistemáticamente estructurada nace con los griegos durante el período clásico (600 - 300 a.C.), y alcanza con ellos un altísimo grado de desarrollo, se sabe que los Sumerios en Mesopotamia (4000 a.C.) poseían un conocimiento de los números

[3] MATEMATICA. Ciencia que tiene por objeto el estudio de las propiedades de la cantidad calculable. (Peq Larousse)

que les permitía tener acceso a la resolución de problemas algebraicos[4] elementales. En lo que compete a la geometría, su papel era insignificante, al punto que no se manejaba como disciplina independiente; de modo que aquellos problemas que implicaban la división de un terreno o el cálculo de las dimensiones de los ladrillos para alguna construcción eran interpretados como problemas algebraicos. (Kline.10:72) "*Aparte de algunos pocos hechos especiales, tales como el cálculo del radio de un círculo que inscribe un triángulo isósceles conocido, la sustancia de la geometría babilonia, era una colección de reglas para el cálculo de áreas de figuras planas elementales, incluídos los polígonos regulares, y los volúmenes de sólidos simples. La geometría no se estudiaba en y por sí misma sino siempre en conexión a problemas prácticos*" (Kline.11:72).

Por su parte, los Egipcios no establecieron separaciones sensibles entre la aritmética[5] y la geometría, y así queda establecido en los problemas que se han descifrado en los papiros.[6] De igual manera que los babilonios, los egipcios consideraron la geometría como una herramienta práctica, cuyo desarrollo se debió, según Herodoto, a la necesidad de redefinir los linderos de las propiedades de los agricultores, cada vez que el Nilo se retiraba después de su rutinaria innundación anual. (Kline.19:72)

Los primeros aportes significativos al estudio de la geometría fueron hechos por los griegos durante el período Helénico, segundo gran período de su historia, y se

[4] ALGEBRA. Parte de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo mas general y se vale de letras para representarla. (Peq Larousse)

[5] ARITMETICA. Ciencia que estudia las propiedades elementales de los núrneros racionales.(Peq. Larousse)

[6] Los principales documentos matemáticos que sobreviven se encuentran en dos importantes papiros; el papiro de Moscú y el papiro Rhynd descubierto en 1858. Aunque ambos datan de 1700 a.C., la matemática contenida en ellos era conocida para los Egipcios desde 3500 a.C., y muy poco fué agregado a ella hasta los tiempos de la conquista griega.

reúnen en los ELEMENTOS de Euclides[7] y las SECCIONES CONICAS de Apolonio.[8]

La geometría transita una larga y accidentada historia a lo largo del tiempo y a través de las distintas culturas, de modo que hasta donde se sabe, fué muy poco lo significativo que se aportó a su estudio desde los tiempos de Pappus (Grecia 200 a.c.) hasta cerca de 1600, cuando surgen nuevos problemas como consecuencia del trabajo de los pintores renacentistas para quienes la representación de las imágenes tal y como se perciben en el mundo real es la meta central. Por primera vez se hace patente el problema de como representar el mundo real tridimensional en un lienzo, superficie que obviamente solo tiene dos dimensiones. (Kline.232:72) Es exclusivamente a partir de tal interrogante —de orden exclusivamente práctico— que se desarrolla la geometría Proyectiva, la cual representó un valioso aporte en el futuro desarrollo de la pintura renacentista, pero que sin embargo pronto perdió interés entre los matemáticos, para quienes los métodos algebraicos probaron ser, en general, mas efectivos para manejar el conocimiento cuantitativo requerido por la ciencia y la tecnología.

La Geometría Proyectiva se abandona en favor del Algebra, la Geometría Analítica —a cuyo desarrollo contribuyó ostensiblemente René Descartes— y el Cálculo, hasta el siglo XIX, cuando nuevos puntos de vista permiten a los matemáticos

---

[7] Los ELEMENTOS constan de trece libros, los cuales, además de contener los conceptos en los que se fundamenta la geometría del espacio finito (plana y sólida ó tridimensional), tal como la conocemos y estudiamos hoy en día, representan "la primera fuente sustancial de conocimiento matemático el cual ha sido usado por las generaciones sucesivas y ha influenciado el curso de la matemática como no lo ha hecho otro libro." (Kline.86:72)

[8] Las SECCIONES CONICAS de Apolonio representan el primer estudio extensivo y sistemático donde se desarrolla toda la base acerca de la naturaleza de las tres secciones cónicas (elíptica, parabólica e hiperbólica) que produce un plano cuando secciona un cono en direcciones distintas con respecto a sus generatrices.

fructificar ideas que habían permanecido inexploradas en la Geometría Proyectiva (Kline).

Así pues, "el interés por los viejos problemas de la geometría da lugar a serias confrontaciones entre los "analíticos" y los "sintéticos", geómetras puros, quienes buscaban ahora reafirmar su rol en el campo de la matemática. " *Como para vengarse de Descartes porque su creación de la Geometría Analítica había sido la causa del abandono de la geometría pura, los geómetras del naciente siglo XIX, hicieron su objetivo derrotar a Descartes en el juego de la geometría.* " (Kline.836:72)

El estímulo definitivo al renacimiento de la geometría sintética se debió al empuje de Gaspard Monge, (1746-1818) quien desarrolló un método gráfico el cual, además de simplificar notablemente el análisis de eventos tridimensionales, permitía interpretar con riguroso acierto los resultados obtenidos por métodos analíticos. Es el primero en traer orden al caos en que se encontraban los métodos gráficos que hasta ahora eran usados en las artes industriales, al enunciar un pequeño número de principios ordenadores y tratar sistemáticamente el problema de la proyección de figuras tridimensionales como imágenes bidimensionales. Su contribución [9], aunque no abrió nuevos senderos al subsecuente desarrollo de la geometría, se convirtió en lo sucesivo en una herramienta de análisis gráfico en arquitectura e ingeniería, constituyendo además la teoría del dibujo industrial. Su obra está plasmada en su *Traité de géométrie descriptive* (1799). (Kline.837:72) De

[9] Vale la pena señalar, según lo explica Kline (536:72), que uno de los aportes mas importantes a la resolución de los problemas sobre ecuaciones diferenciales parciales, fué precisamente la introducción de la geometría como herramienta de interpretación del trabajo analítico. Mientras para el resto de los matemáticos contemporáneos, análisis y geometría erán tópicos distintos con algunos puntos de contacto, para Monge representaban dos vías de interpretación convergentes.

nuevo nos encontramos con una innovación en la evolución de la geometría, que tiene su orígen en la necesidad de resolver cuestiones de orden práctico[10].

10 "Usando este método de análisis, Monge terminó el diseño de una fortaleza en un tiempo sin precedentes Cuando entregó los planos a su incrédulo oficial en jefe, este se resistía a aceptarlos porque dudaba que en tan poco tiempo pudieran estar completos y exactos, pero, ante la insistencia de Monge de que sus planos eran correctos, el oficial accedió, aunque de mala gana, a construir la fortaleza. Su éxito fué tal que, de ahí en adelante, la Geometría Descriptiva de Monge se consideró como 'secreto militar' por muchos años." (Slaby 68:2)

LOS SISTEMAS DE PROYECCION GRAFICA. LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

El proceso técnico de concepción creativa de los objetos que el hombre fabrica para diversos fines, así como el análisis morfológico de aquellos que ya existen (se trate de una obra de arquitectura; de ingeniería civil, mecánica, eléctrica o electrónica; de un artefacto de uso cotidiano a producirse industrialmente o de un mueble de cualquier material, o de los componentes de un aparato cualquiera), requiere invariablemente de dos componentes cognocitivos imprescindibles:

1.- Un cuerpo teórico-conceptual, fundamentado en la geometría cartesiana —del espacio finito— el cual nos da acceso a la comprensión morfológica de los cuerpos físicos al explicar las relaciones que internamente guardan entre sí los distintos elementos que los conforman, así como a las relaciones de este con su contexto inmediato.

2.- Un conjunto de destrezas en el manejo de los recursos técnico-instrumentales a través de los cuales podemos reproducir, interpretar y analizar, evalúar y crear —ó re-crear— nuestro mundo físico, y poder comunicárnoslo a nosotros mismos o a las demás personas. Estos recursos comprenden, naturalmente, todos los medios a través de los cuales esta realidad puede ser visualmente descrita, y en este caso particular que interesa a nuestro estudio, el medio gráfico constituye el vehículo que hace posible satisfacer estos fines.

Desde un punto de vista práctico, ambas categorías de conocimientos, se conjugan e interactúan como una entidad indivisible donde la teoría se verifica a lo largo del desarrollo del proceso de representación a través de un conjunto de procedimientos gráficos, presentes en la aplicación de todos los recursos de análisis a la resolución de problemas de la geometría del espacio, a la vez que

dichos procesos se apoyan en la teoría geométrica sin cuyo respaldo no tendrían fundamento alguno.

Por otra parte, la dificultad de reproducir la totalidad de los atributos morfológicos y dimensionales de los objetos tridimensionales en una superficie plana que es, obviamente, bidimensional —garantizando, al mismo tiempo, que la imagen ofrecida sea tan aproximada a la realidad que no deje lugar a dudas o interpretaciones erróneas sobre las cualidades del objeto real que tal imagen debe representar— constituye, desde el punto de vista técnico, uno de los escollos mas importantes a superar en el proceso de representación gráfica. A ello se suma el hecho de que la finalidad constructiva de estas representaciones confiere una relevancia insoslayable, a la precisión con la cual se reproduzcan y expresen en forma gráfica, los elementos que integran un objeto determinado, de allí que sea tan importante el dominio diestro de las técnicas de uso de los instrumentos de dibujo, así como de las técnicas de representación gráfica.

La posibilidad de llevar a cabo dicha representación, que nos puede permitir recrear la realidad tridimensional al "leer" unos gráficos que la reproducen sobre una superficie, (tal como recreamos ambientes, eventos y personajes a través de la lectura de una buena novela) es absolutamente imposible en ausencia de aquel cuerpo teórico al que nos hemos referido, pues en él nos apoyamos para establecer y comprender las relaciones que guardan entre sí los componentes de un objeto en el espacio real.

La ciencia que se ocupa de resolver este tipo de problemas se conoce con el nombre de Geometría Descriptiva, y se la debemos, como ya vimos en el capítulo anterior al ingeniero militar francés Gaspard Monge.

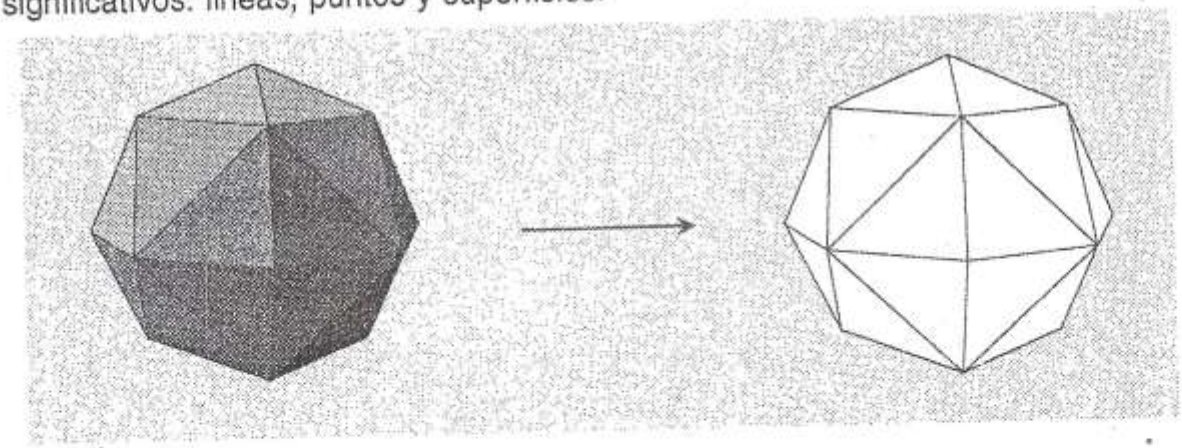
Steve Slaby, ilustra los múltiples alcances de la materia cuando, hablando de sus aplicaciones, expresa que *"La Geometría Descriptiva tiene múltiples aplicaciones en disciplinas tales como la ingeniería, ciencias y arquitectura. Por ejemplo, podemos citar las relaciones que guardan entre sí las partes de una estructura respecto a las partes de otra; las relaciones entre un elemento de una máquina con otro elemento de la misma; el modo como se afectan uno a otro en su movimiento y resistencia, así como también el efecto total que producen en la máquina; y, si queremos ampliar los ejemplos, podemos citar, ademas, la relación que guardan entre sí las moléculas de un cristal o de un compuesto químico. Todos estos son ejemplos de relaciones espaciales..."* , y continua de inmediato: *"...en términos de ingeniería, ciencia y arquitectura, las relaciones espaciales que se expresan y analizan mediante la Geometría Descriptiva, son algunos de los factores mas importantes para el diseño de aparatos científicos, sistemas de ingeniería y estructuras arquitectónicas."*

Así como existen muchos instrumentos ópticos distintos para "apresar" la realidad y reproducirla en forma bidimensional, simulando la presencia de las tres dimensiones (las cámaras de fotografía, cine y video; los equipos holográficos, los tomógrafos y resonadores magnéticos, los sensores remotos, los programas gráficos para computadoras, etc., todos los cuales podrían interpretarse como "sistemas de representación" de la realidad física), la Geometría Descriptiva, como ciencia gráfica, dispone de una gama de recursos que le son propios, para llevar a cabo el mismo fín, cual es la representación de la realidad material.

Para los fines que interesan a la Geometría Descriptiva, de todos los atributos que poseen los objetos físicos, solo hace uso de los mas elementales, es decir, aquellos que permiten describir la forma y las dimensiones. De este modo, omite la

consideración de cualidades físicas, como son por ejemplo, el material que los conforma, el peso, el color, la textura, etc.

He aqui entonces que para considerar los objetos, la Geometría Descriptiva ignora aquellas cualidades que no son relevantes a su finalidad fundamental, cual es, repetimos, el análisis de las relaciones espaciales de los objetos y/o sus componentes, y su representación bidimensional. De modo pues, que hace abstracción de aquello que no le interesa, y reduce los objetos a elementos significativos: lineas, puntos y superficies.



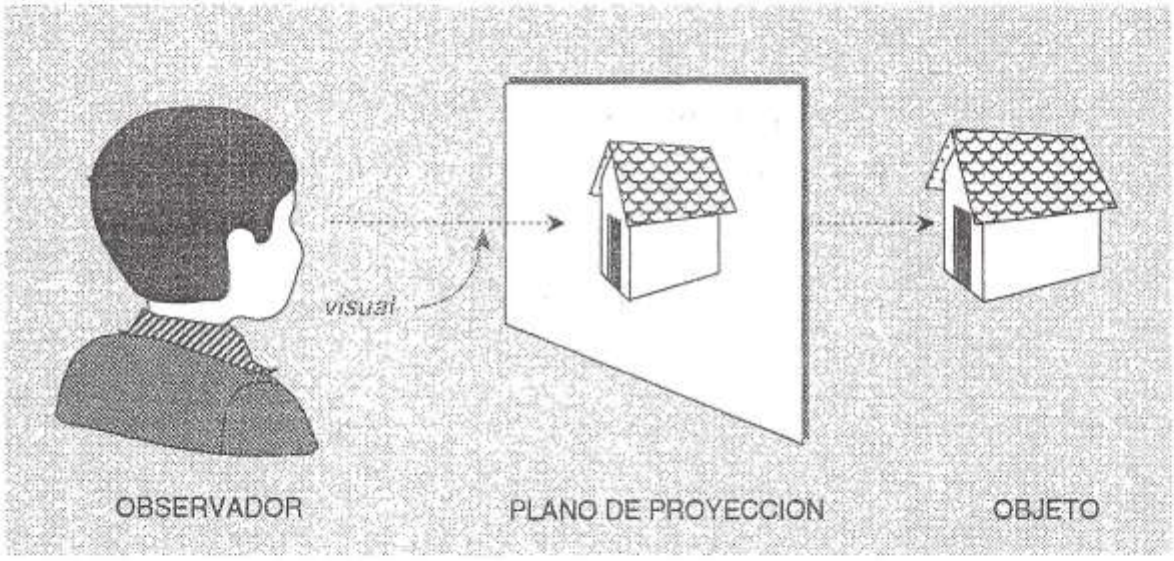
Cuando un objeto cualquiera es observado por nosotros, la imagen que de él percibimos es directamente reproducida sobre la superficie de nuestra retina, de una manera semejante a lo que ocurre cuando esa imagen se registra en la superficie de una película fotográfica. De hecho, lo que vemos del objeto, no es otra cosa sino la imagen invertida del mismo sobre la superficie de nuestra retina ocular. Nuestro cerebro, a través de complejos mecanismos, se encarga de presentarnos esa imagen en una posición concordante, es decir, la invierte de nuevo para que la percibamos de un modo adecuado y coherente, digamos "derecha".

Sea cual fuere, sin embargo, el medio a traves del cual dicha representación tenga lugar fuera de nuestro própio órgano visual (fotografía, dibujo, pintura, etc.), el

hecho real es que la imágen así obtenida, invariablemente reproduce —en una superficie distinta a la retina, como lo es un plano de proyección— (la película fotográfica, el papel, el lienzo, etc.) al mismo objeto que en la realidad observamos.

No será difícil entender entonces, que dicha imagen —objeto de la representación— no es otra cosa sino una expresión de lo que nosotros mismos, como observadores, percibimos del objeto cuando nos colocamos frente a él. De modo que dicha representación gráfica, sea cual fuere el medio de representación, no es otra cosa sino la transferencia de la imagen visual que del mismo registra nuestra retina, a una superficie plana ajena y distinta a ella, separada de nosotros y la cual, sabemos, es bidimensional. Con cuanto grado de aproximación a la realidad esta imagen es reproducida depende fundamentalmente de la naturaleza y posibilidades de los medios físicos utilizados para ello.

La Geometría Descriptiva se vale de los Sistemas de Proyección, para reproducir en una superficie los eventos que ocurren en el espacio tridimensional.

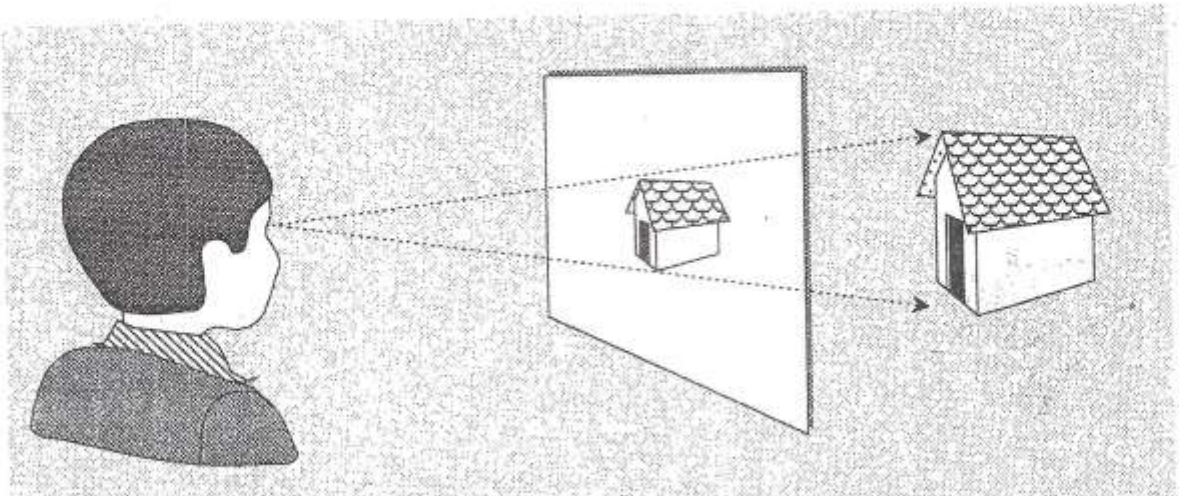


Es comprensible entonces, que en todo sistema de proyección intervengan tres protagonistas fundamentales, a saber, 1.un **observador** que percibe, 2. un **objeto** a ser representado, y 3. un **plano de proyección**. El observador dirige su

visual al objeto y representa una imagen de lo que percibe sobre un plano de proyección, tal como lo sugiere la figura al pie de la página anterior.

La utilización de los diversos sistemas de proyección depende fundamentalmente de las cualidades propias de los objetos a representar y de la finalidad misma de la representación. Así, cada sistema de proyección posee su própia estructura y establece parámetros particulares, que los distinguen entre sí, como veremos someramente a continuación.

En general, según la distancia entre el observador y el objeto sea finita o infinita, las proyecciones pueden ser respectivamente cónicas y cilíndricas (o paralelas como tambien se llama a estas últimas).



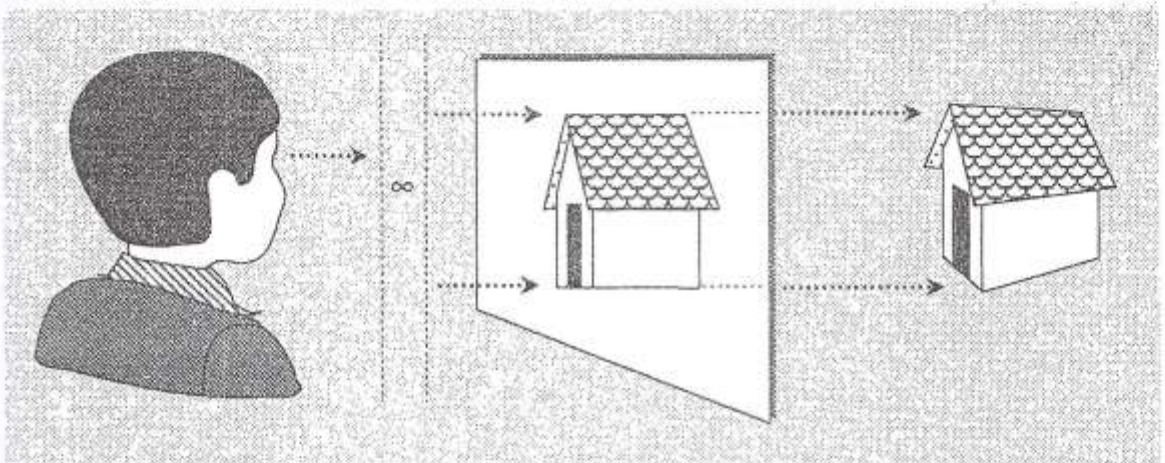
En el Sistema Cónico, el observador está a una distancia finita del objeto y representa su imagen sobre un plano, en una dinámica semejante a la de "tomarle" una fotografía

Las proyecciones cónicas se obtienen como resultado de la transferencia de la imagen percibida de un objeto a una superficie plana, cuando es observado a una distancia finita. Así, el Sistema Cónico permite reproducir la imagen de un objeto con las deformaciones dimensionales y morfológicas propias del efecto de

perspectiva, lo cual le permite —dependiendo de la posición del objeto con respecto al plano de proyección— una representación de los objetos, " tal como ellos son " en la realidad, como lo sugiere la ilustración anterior.

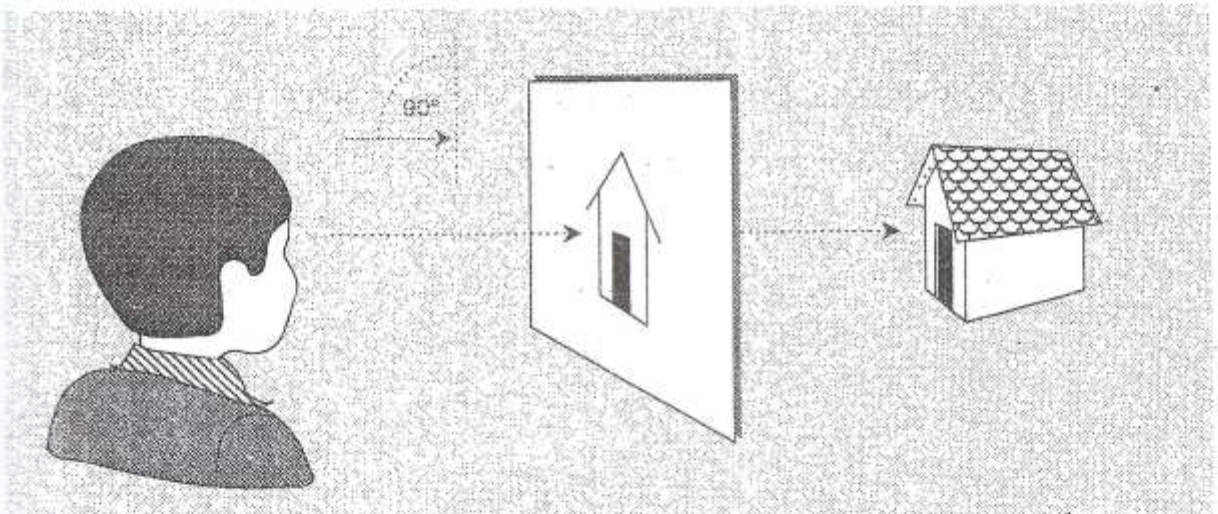
La fotografía nos ofrece un claro ejemplo del funcionamiento básico del Sistema Cónico, donde la imagen del objeto es registrada sobre la película, gracias a que los rayos visuales tendidos entre el objeto y el observador inciden de un modo convergente sobre la superficie fotográfica, lo que hace posible la reproducción de objetos muy grandes sobre una pequeña superficie, o de aquellos muy pequeños, sobre una de mayor tamaño.

Por su parte, las proyecciones cilíndricas o paralelas, suponen al observador alejado a una distancia infinita del objeto, de tal manera que las visuales dirigidas al mismo ya no son convergentes sino paralelas entre sí, lo cual anula definitivamente el efecto de perspectiva que caracteriza a la proyección cónica. Las imágenes de los objetos reproducen las magnitudes reales de aquellos elementos paralelos al plano de proyección, lo cual da una apariencia "plana" a la representación, como podemos percibirlo en la figura siguiente.

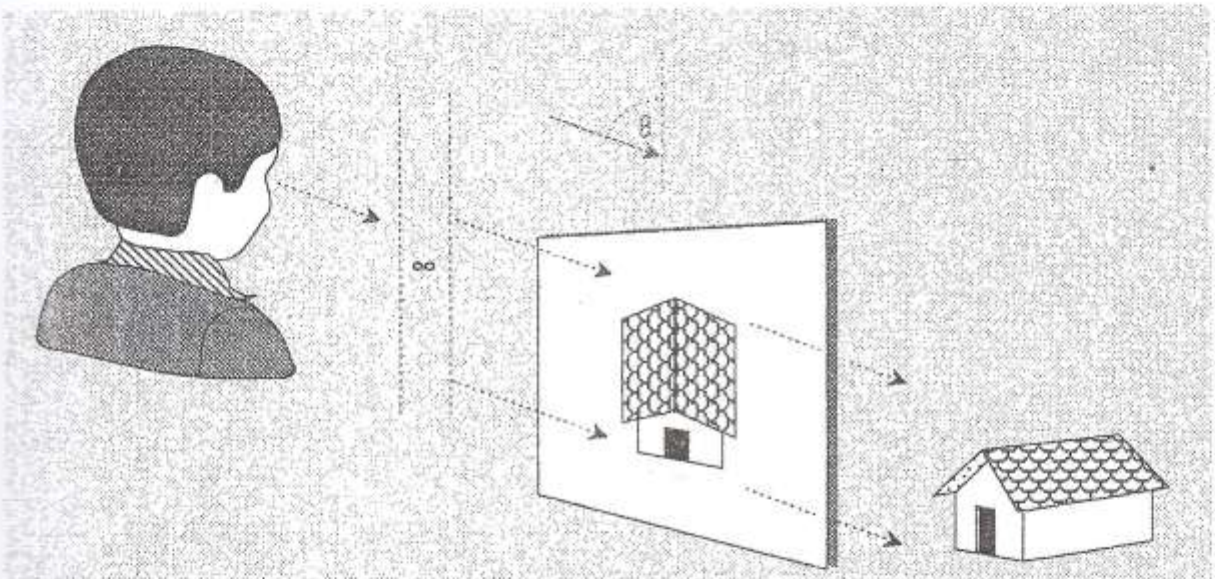


En la proyección cilíndrica o paralela, el observador se supone ubicado una distancia infinita del objeto. Por ello, sus visuales se hacen paralelas entre si cuando alcanzan el plano de proyección y al objeto. Consecuentemente la imagen del objeto carece de perspectiva, y se reproduce con un efecto de aplanamiento, ausente por completo en la representación cónica

Adicionalmente, dependiendo del ángulo de incidencia de las visuales del observador sobre el plano de representación, las proyecciones cilíndricas pueden ser ortogonales u oblicuas. Se dice que son ortogonales cuando el ángulo de incidencia de la visual del observador forma 90 grados con respecto al plano de proyección, y oblícuas cuando el ángulo de incidencia es tambien oblícuo.



En la proyección ortogonal, las visuales del observador, que se encuentra en el infinito, inciden sobre el plano de proyección, bajo un ángulo de 90°



En la proyección oblícua, las visuales del observador, que se encuentra en el infinito, inciden paralelamente entre sí, formando con el plano de proyección un ángulo θ distinto de cero y 90°.

3. LOS SISTEMAS DE PROYECCION GRAFICA . LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Toda vez que la relación entre la imagen real y la representada, es conceptualizada de maneras distintas de acuerdo a las cualidades de la realidad sujeta a representación y la finalidad utilitaria de su imagen, la variedad de los sistemas de proyección se extiende mas allá de los que hemos descrito. Aunque en todos intervienen los mismos protagonistas, cada uno define sus parámetros particulares para ajustarse adecuadamente a las conveniencias exigidas por las necesidades propias de los diversos eventos. Así por ejemplo,la superficie de un terreno se manipula mas convenientemente a través del sistema que se conoce como "acotado", mientras que las cualidades arquitectónicas y estructurales de caracter constructivo, se refieren mejor en los sistemas "diédrico" y "axonométrico". Los sistemas axonométricos y el cónico, permiten visualizar las cualidades morfológicas y dimensionales de los objetos, mediante una sola imagen de los mismos y pueden complementar la información ofrecida por otros sistemas al permitir agregar profundidad y realismo a las representaciones, brindando una representación mas aproximada de la realidad.

La descripción de otros Sistemas de Proyección no forma parte de los objetivos de este trabajo, el cual se limitará exclusivamente al tratamiento del Sistema Diédrico o de Doble Proyección Ortogonal .

CUESTIONARIO

1. ¿Que es un sistema de proyección ?
2. ¿Cuales son los protagonistas de un sistema de proyección ?
3. ¿Que es una proyección ?
4. Señale tres diferencias básicas entre el Sistema Cónico y un sistema de proyección ortogonal.
4. ¿Cual es la diferencia entre un sistema de proyección ortogonal y un sistema de proyección oblícuo ?
5. ¿Por qué la fotografía es un buen recurso para "explicar" el Sistema Cónico ?
6. ¿Por que se asume que en un sistema de proyección ortogonal las visuales dirigidas por un observador a un objeto, lo alcanzan siendo paralelas entre sí ?

El SISTEMA DIEDRICO. DOBLE PROYECCION ORTOGONAL.

La necesidad de formalizar físicamente los objetos que ocupan nuestra imaginación, dá lugar a que un aspecto central en el proceso de representación de objetos tridimensionales, consista -como lo hemos señalado previamente- en revelar la apariencia real de los mismos en una superficie plana, mediante la reproducción de las tres dimensiones de dichos objetos.

Las limitaciones que esta necesidad impone, no pueden reflejarse en la omisión de la representación de alguna de dichas dimensiones, pues, a los fines del análisis gráfico y la comunicación de información, todas las propiedades morfológicas y dimensionales que acompañan a los objetos, deben ser explícitamente descritas en forma gráfica.

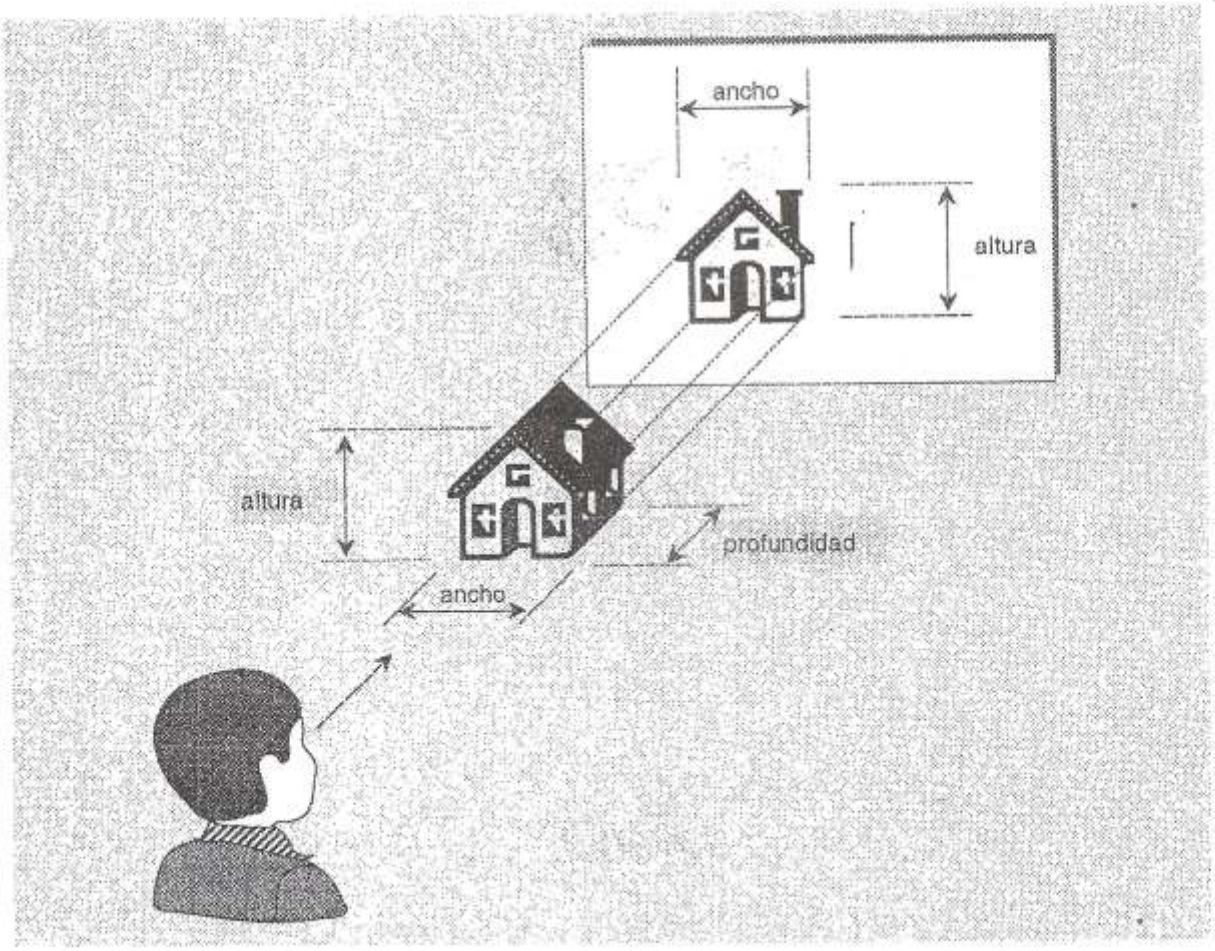
Este problema es eficientemente abordado por la Doble Proyección Ortogonal, un Sistema de Proyección que permite llevar a cabo representaciones gráficas de utilidad constructiva de objetos tridimensionales.

Este Sistema de Proyección, comparte con el Axonométrico las propiedades de los sistemas de proyección cilíndrica o paralela, los cuales —como ya lo hemos señalado— se diferencian del cónico en el hecho de que las visuales dirigidas al objeto son paralelas entre sí, en lugar de ser divergentes. Es de suponer que al observar el objeto desde una distancia infinita (∞), percibimos una imagen del mismo que no converge hacia puntos de fuga, como efectivamente nos ocurre al observar los objetos a distancias finitas, los cuales nos muestran una imagen con profundidad debida al efecto de perspectiva. Esa pérdida de profundidad se debe precisamente a que aquellas dimensiones del objeto que son paralelas al plano de proyección, se mantienen inalteradas en la imagen proyectada. En el capítulo

anterior, ya hicimos mención de estas diferencias, cuando comparábamos las proyecciones cónicas con las cilíndricas. Detallemos esas diferencias, aún mas evidentes al comparar las fotografías del automóvil que mostramos a continuación; la primera de ellas tomada a una distancia muy cercana de él y la segunda a una distancia considerablemente mayor.

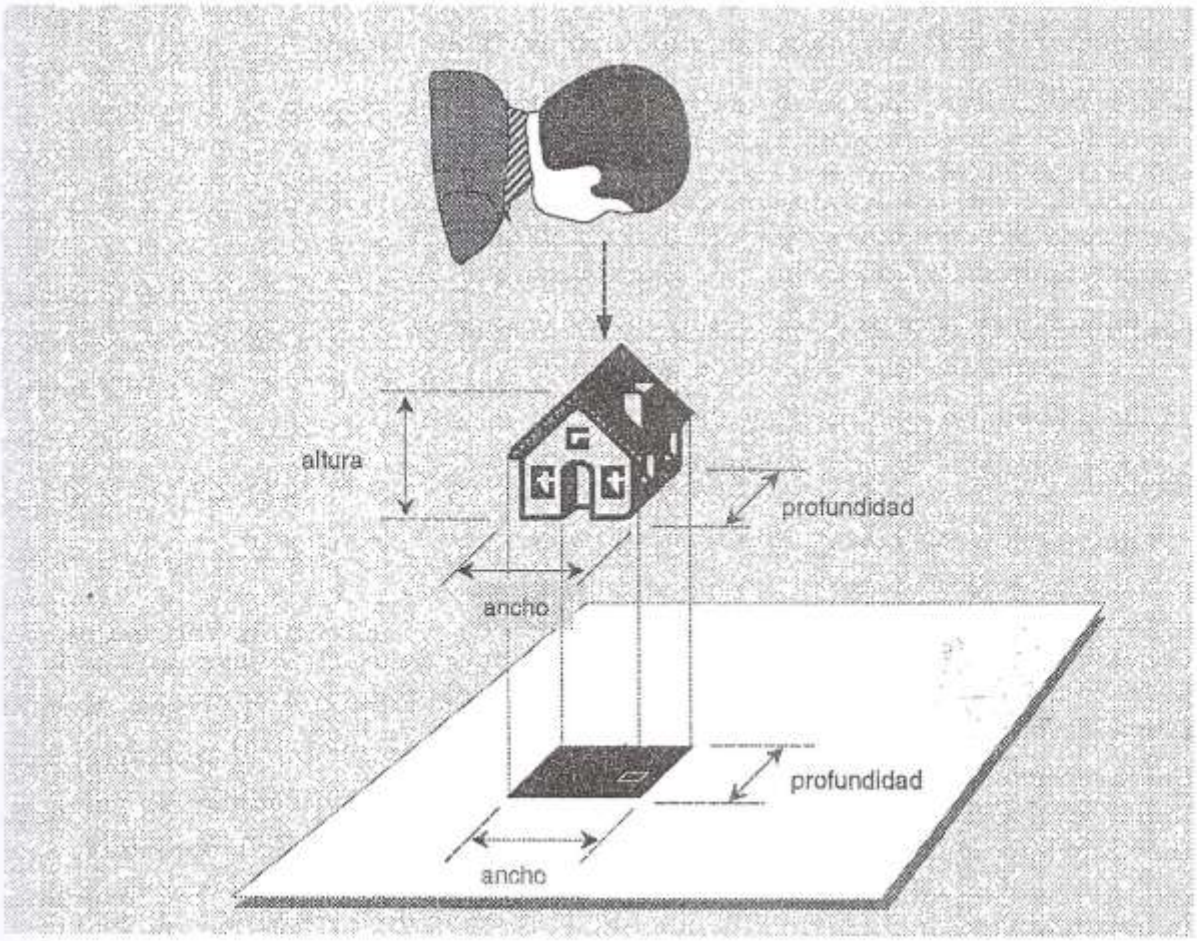
Verifique cuán notable es la pérdida del efecto de perspectiva en la segunda fotografía, debido precisamente a lo alejado que se colocó el observador para obtener la imagen mostrada.

Ahora bien, ¿por que hablamos de Doble Proyección Ortogonal? Veamos. Es obvio que nuestro sistema se debe comportar como aquel donde el observador, colocado en el infinito, mira al objeto de su interés en una dirección perpendicular al plano sobre el cual lo quiere representar.



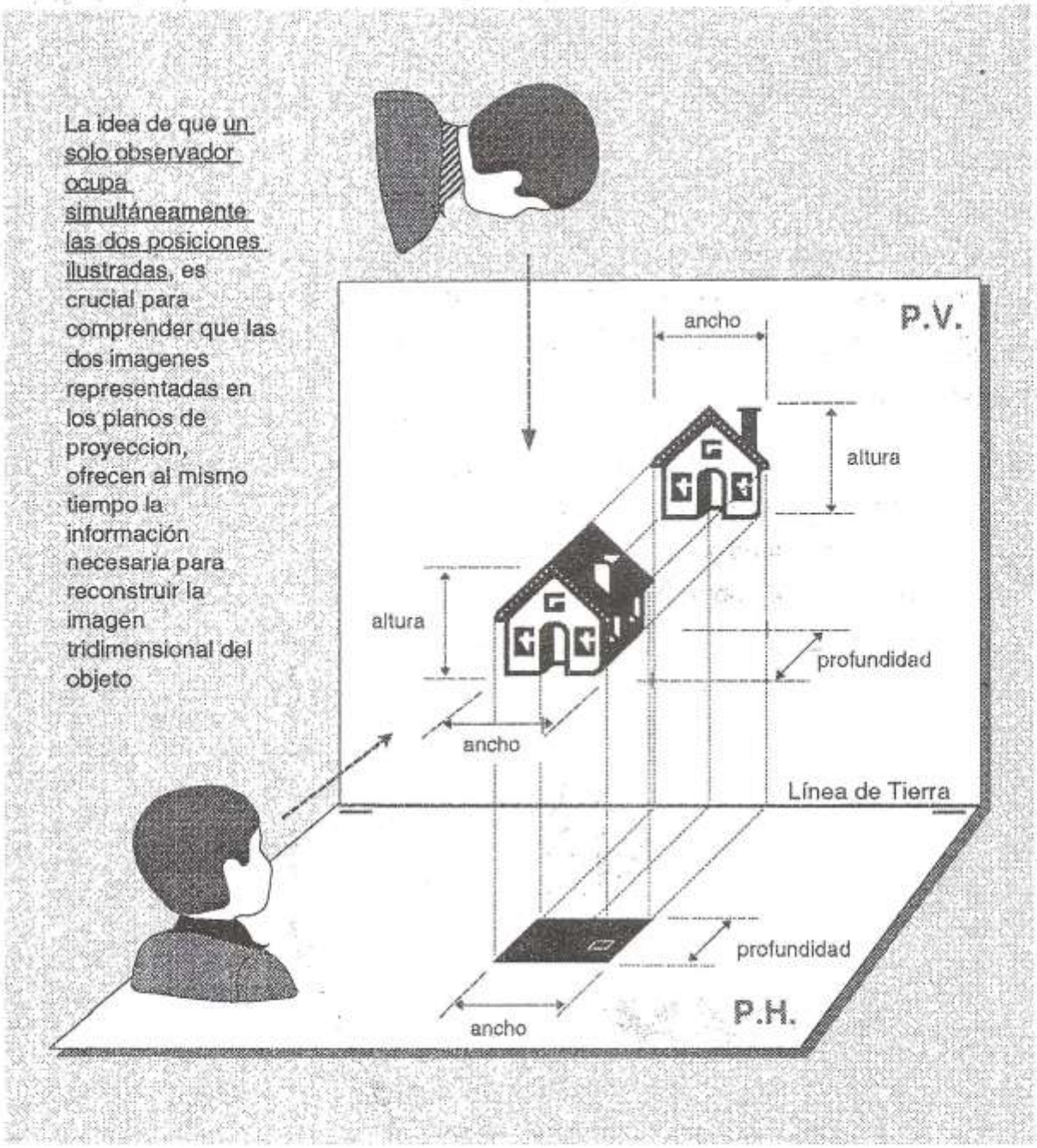
Como vemos en esta figura, de las tres dimensiones del objeto observado, solo dos -ancho y altura- son visibles para él, y eso es lo que le revela la imagen que representa en el plano correspondiente, sobre el cual la profundidad no puede reproducirse puesto que —desde ese punto de vista— tiene la misma dirección de la visual , y todo el volumen del objeto se oculta tras la fachada que directamente observa y, desde luego, representa.

Una posición de observación, como la que ilustra la figura siguiente, desde la cual el objeto pueda ser percibido desde "arriba" permitiría representar su imagen sobre un plano "horizontal", y la profundidad, que no aparece en la otra proyección, queda revelada en ésta, de modo que ambas imágenes nos ofrecen toda la información sobre la "volumetría" del objeto.



Así, la percepción conjunta de ambas imágenes deberá permitirnos "reconstruir" la imagen real del objeto que las genera. Naturalmente, este proceso constituye una habilidad que es preciso desarrollar, para poder tener una comprensión exhaustiva de la naturaleza de los diversos problemas que abordará la Doble Proyección Ortogonal.

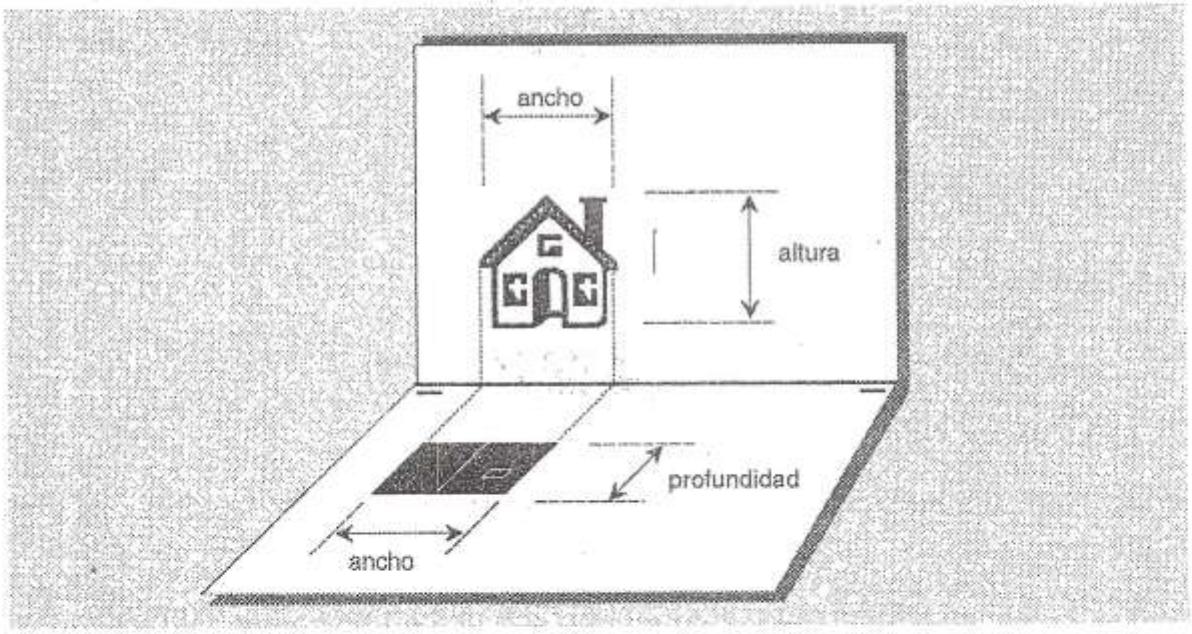
De esta forma, al contar con dos imágenes distintas, percibidas en forma simultánea desde dos posiciones cuyas visuales son ortogonales entre sí , los planos sobre los cuales las mismas se representan, son tambien ortogonales, y de la síntesis de ambas situaciones, resulta el evento que describe la figura siguiente, en esencia, un sistema de Doble Proyección Ortogonal.



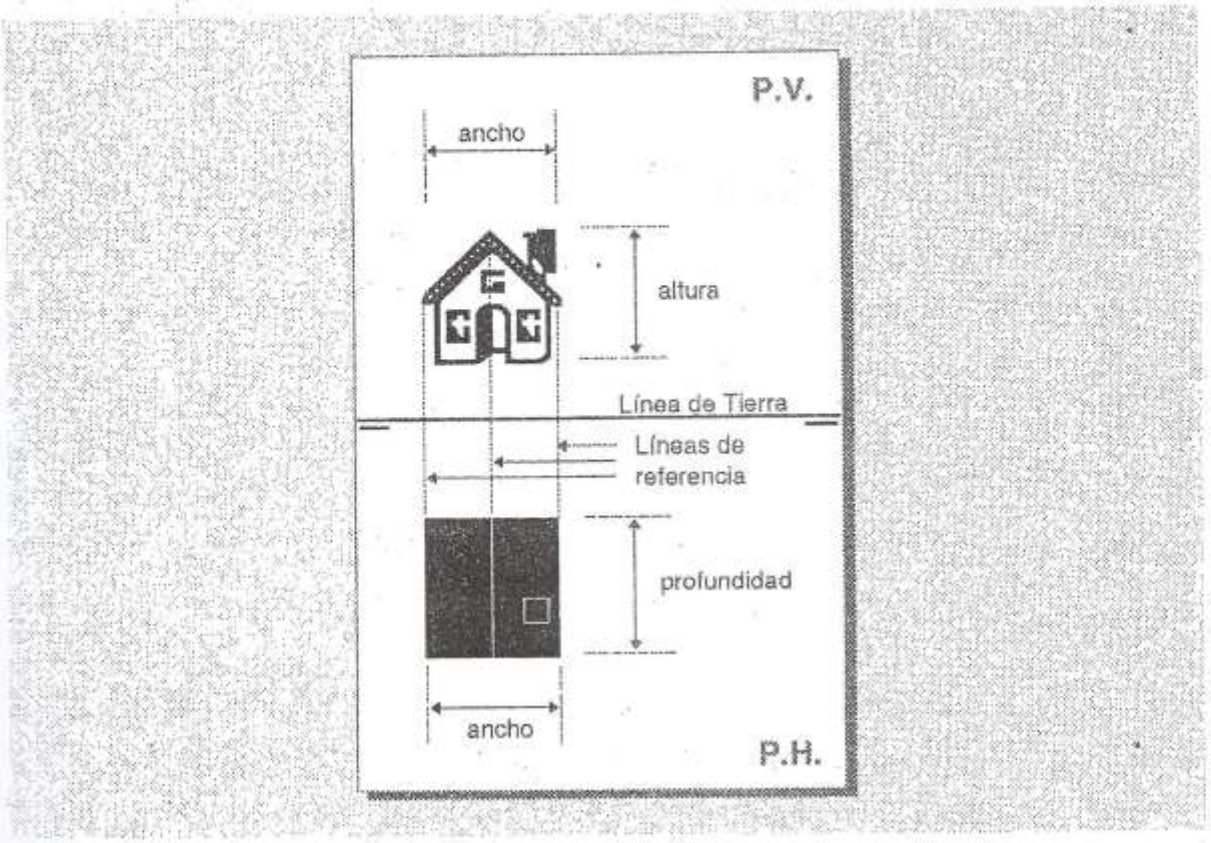
Es así que, en la representación diédrica, la información sobre un objeto real, la podemos obtener en forma directa, de la observación simultánea de dos imágenes (Doble), obtenidas al "proyectar" (Proyección) un objeto sobre dos planos ortogonales, de modo que las visuales dirigidas a ellos formen respectivamente 90º (Ortogonal) con cada uno de dichos planos. Ambas imágenes nos informan conjuntamente sobre la morfología y las dimensiones del objeto, conocimiento que una sola de ellas no es capaz de transmitir, de modo que una es completamente inútil sin la otra.

Hemos entonces confeccionado un sistema de DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL, cuyos protagonistas, como ya señalamos en el capítulo anterior son tres, a saber: UN OBSERVADOR que percibe simultáneamente UN OBJETO desde dos puntos de vista, y cuyas visuales forman 90º entre sí, y que reproduce dichas imágenes en sendos PLANOS DE PROYECCIÓN , el Vertical (PV) y el Horizontal (PH), los cuales se intersectan ortogonalmente a lo largo de la Línea de Tierra (LT).

Sabiendo que uno de los fines de la Doble Proyección Ortogonal es la de permitirnos manipular los objetos del espacio tridimensional a través de esas dos proyecciones, una vez conocidas estas, podemos prescindir del objeto y quedarnos tan solo con las imágenes obtenidas, como nos lo muestra la figura siguiente.



Ahora bien, toda vez que necesitamos reproducir ambas proyecciones sobre una sola superficie de representación, podemos desplegar los dos planos de proyección de modo tal que se confundan en una sola superficie que coincide con la del papel en que representamos, como lo vemos en la figura siguiente, la cual nos muestra la posición definitiva en que se nos presentarán de ahora en adelante las imágenes ortogonales de los objetos, separadas entre sí por la **Línea de Tierra**, la cual se identifica con dos barras bajo sus extremos. Los puntos respectivos de ambas proyecciones se correlacionan entre sí mediante las **líneas de referencia**, las cuales son siempre perpendiculares a la Línea de Tierra.



En las representaciones ortogonales subsiguientes, el borde de los planos de proyección se omitirá por ser, obviamente, innecesario.

EL ESPACIO EN EL SISTEMA DIEDRICO

Entendemos el espacio físico, como el ámbito donde ocurren los eventos de la realidad concreta en la cual nosotros existimos (el espacio donde nos movemos, el espacio que ocupa una mesa, el espacio recorrido durante una caminata, el espacio en que volamos, etc...). Por otra parte, el espacio en el cual ocurren los eventos geométricos —el espacio geométrico— es un espacio imaginario, abstracto e infinito, donde los objetos han perdido sus cualidades naturales para convertirse, libres de sus atributos físicos, en entidades conceptuales; un espacio poblado de figuras conceptuales, matemáticamente perfectas, las cuales podemos representar gráficamente y manipular a nuestro antojo cuando las ubicamos, por ejemplo, en el espacio diédrico.

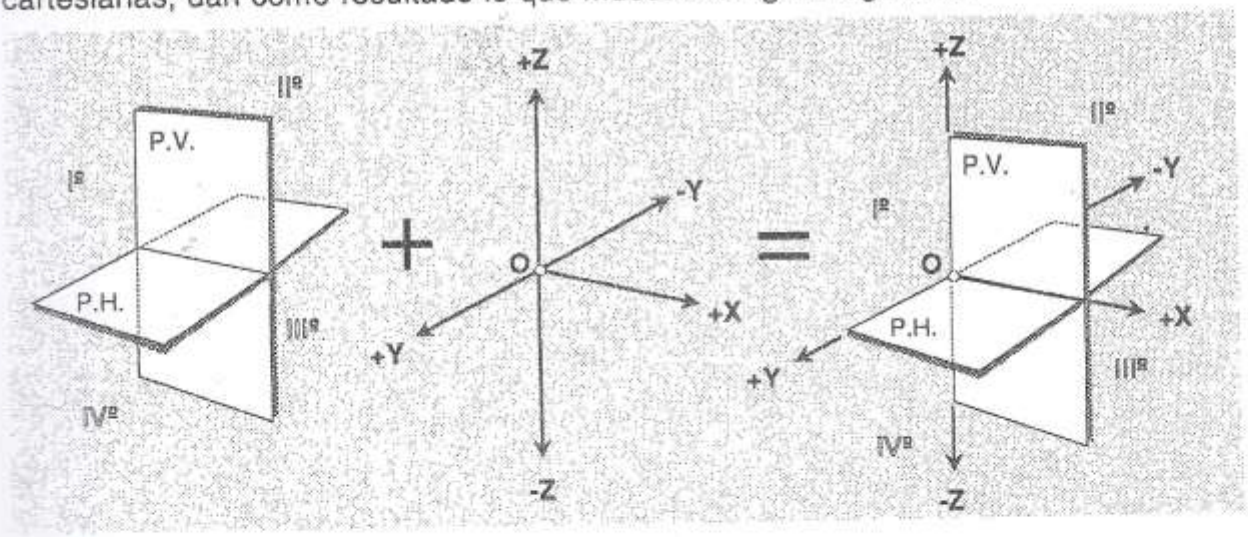
El espacio diédrico es el entorno del espacio geométrico donde conviven e interactúan los protagonistas del sistema diédrico. La presencia de los planos de proyección asociados a un sistema de coordenadas cartesianas, particulariza la calidad de este espacio en tanto que los convierte en vehículos para hacer físicamente visibles los elementos imaginarios del espacio geométrico y, mediante su representación en una superficie plana, manipularlos libremente en forma sistemática, precisa y ordenada, lo cual sería imposible en ausencia de la posibilidad de expresarlos en forma gráfica y hacerlos visibles.

Hemos señalado al inicio de nuestro discurso sobre este sistema e insistimos en ello nuevamente, que las características morfológicas y dimensionales de un objeto aparecen sintetizadas en sus dos proyecciones las cuales, siendo imágenes distintas del mismo, se correlacionan de modo que, en conjunto, nos brindan toda la información sobre aquellas características del objeto, como si las percibiésemos en el objeto mismo. De tal manera, la observación de ambas imágenes planas, debe permitirnos reconstruir en nuestra imaginación la configuración real del objeto

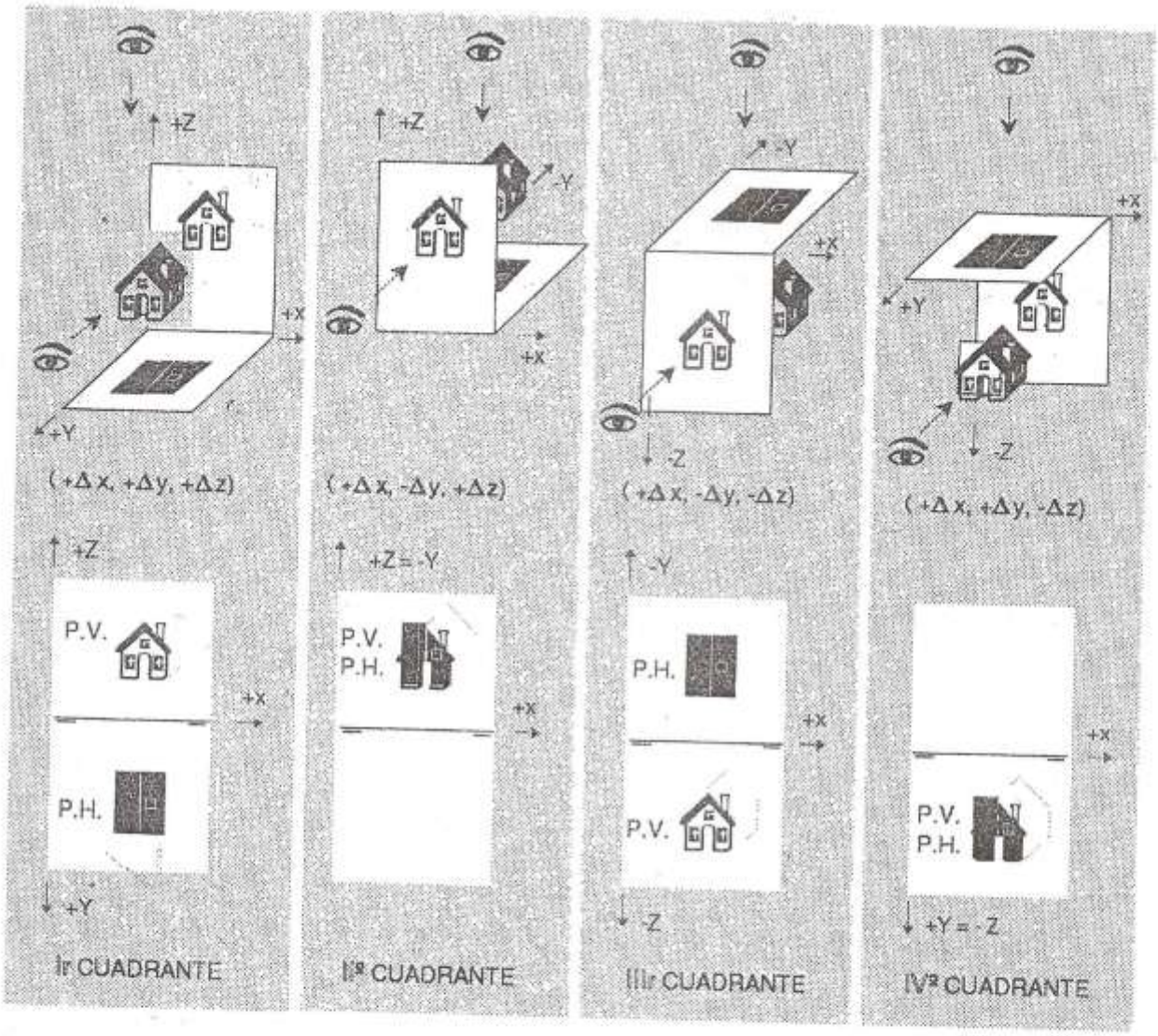
que representan, del mismo modo que hacemos cuando al observar dos fotografías, una de perfil y otra de frente, de un mismo rostro desconocido para nosotros, somos capaces de recrear, en el escenario de nuestra propia imaginación, la apariencia real de la persona a quien pertenecen, imagen esta que no podemos figurar con igual precisión cuando observamos una sola de dichas fotografías. Comprendemos así, que para los fines propios de la Doble Proyección Ortogonal, —insistimos— la existencia de una imagen sin la presencia de la otra, es absolutamente inútil.

El concepto, que hemos subrayado en el párrafo precedente, constituye la clave fundamental en la comprensión de la representación diédrica, pues ambas proyecciones hacen referencia directamente a la realidad física que representan. Trataremos de aprender un "lenguaje", el lenguaje gráfico de la DOBLE PROYECCION ORTOGONAL, que "simula" gráficamente los objetos que representa, y nos permite comprenderlos a traves de la lectura simultánea de, al menos, dos de sus imágenes.

Llegados a este punto, recordemos que la Doble Proyección Ortogonal formulada por Monge, hacía uso de cuatro sectores o cuadrantes que se generan cuando el plano vertical y el plano horizontal de proyección, concebidos en toda su extensión, dividen al espacio. Ambos planos al coincidir con un sistema de coordenadas cartesianas, dan como resultado lo que muestra la figura siguiente



De este modo, la representación de los puntos de un objeto se sujetaba a su ubicación en cada uno de dichos cuadrantes, cambiando en consecuencia las características de sus proyecciones y los signos (+ ó —) de sus respectivas coordenadas (Δx, Δy y Δz). Las ilustraciones siguientes, que nos muestran representaciones espaciales y diédricas, evidencian las distintas situaciones que resultan de ubicar un objeto en cada uno de dichos cuadrantes, dentro de esta concepción, la cual es conocida como el "Sistema Europeo".



Del análisis de los gráficos precedentes podemos resaltar las características siguientes:

1- El uso simultáneo de cuatro cuadrantes para ubicar y representar las proyecciones de un objeto cualquiera.

2- Un igual número de formas distintas de interpretar la lectura del evento geométrico, ya que las proyecciones del mismo se disponen indistintamente con respecto a la Línea de Tierra. Mientras en los cuadrantes impares las proyecciones aparecen separadas por la Línea de Tierra alternando respectivamente sus posiciones, en los cuadrantes pares las proyecciones se confunden respectivamente a cada lado de dicha Línea.

3.- Los valores de las coordenadas de los puntos ubicados en los distintos cuadrantes deben afectarse de signos distintos de acuerdo al cuadrante que ocupan. Así los signos de las coordenadas de un punto cualquiera varían como se indica entre los paréntesis de las figuras respectivas en la página anterior.

4.- Los puntos de observación se modifican de acuerdo al cuadrante en el cual se ubica el objeto. Debido a ello, para cada cuadrante la distribución de los protagonistas del sistema tambien varía, como ocurre en las proyecciones verticales del segundo y tercer cuadrante, y en la horizontal del tercero y el cuarto, donde los respectivos planos de proyección están ubicados entre el observador y el objeto, a diferencia de lo que ocurre en el resto de los casos, donde es el objeto el que se interpone entre el observador y el plano de proyección.

Estas características ponen en evidencia la existencia de elementos contradictorios que menguan significativamente la finalidad práctica del sistema de proyección. Así por ejemplo, la necesidad de manipular simultáneamente formas diversas de

representación, al invocar tambien formas diversas de interpretación, lo hace poco eficiente como instrumento para operar la realidad tridimensional, en contraste con la posibilidad de operar en un solo cuadrante. Por ejemplo, el proceso de imaginar la realidad a partir de dos imágenes confundidas (2º y 4º cuadrantes) difiere -con grandes desventajas- de imaginarla a partir de dos imágenes separadas (1º y 3º cuadrantes). Adicionalmente, la necesidad de asignar signos negativos a ciertas coordenadas, hace engorroso el proceso de representación de puntos y complica innecesariamente la aplicación de los procedimientos gráficos.

Por otra parte, la necesidad de acudir a diversas posiciones de observación para interpretar las proyecciones de un objeto de acuerdo al cuadrante en el cual se ubique, nos hace pensar que la importancia del observador como protagonista en el Sistema Europeo es secundaria, y por tanto prescindible. De hecho, la concepción mas común del sistema diédrico, se sustrae a presentarlo como si solo estuviese conformado por el objeto y los planos de proyección, soslayando al observador o, en el mejor de los casos, sustituyéndolo por un foco de luz. Es de presumir que, por esta razón, el énfasis de los procedimientos que utiliza está preferentemente dirigido a los objetos, de modo que la resolución de problemas bajo esta concepción recurre, como lo veremos, a numerosos procedimientos gráficos distintos, de aplicación restringida exclusivamente a cada una de las situaciones en las que participan los diversos elementos geométricos en el espacio diédrico.

Una reinterpretación objetiva de la concepción de Monge, nos lleva a preguntarnos cual es el fin último de la representación diédrica. Todo instrumento nace impelido por una necesidad, y su eficiencia, entendida como su capacidad de satisfacer plenamente aquella necesidad que le dió origen, está inevitablemente atada al momento histórico en que, por primera vez, ve la luz. Recordemos que, en el

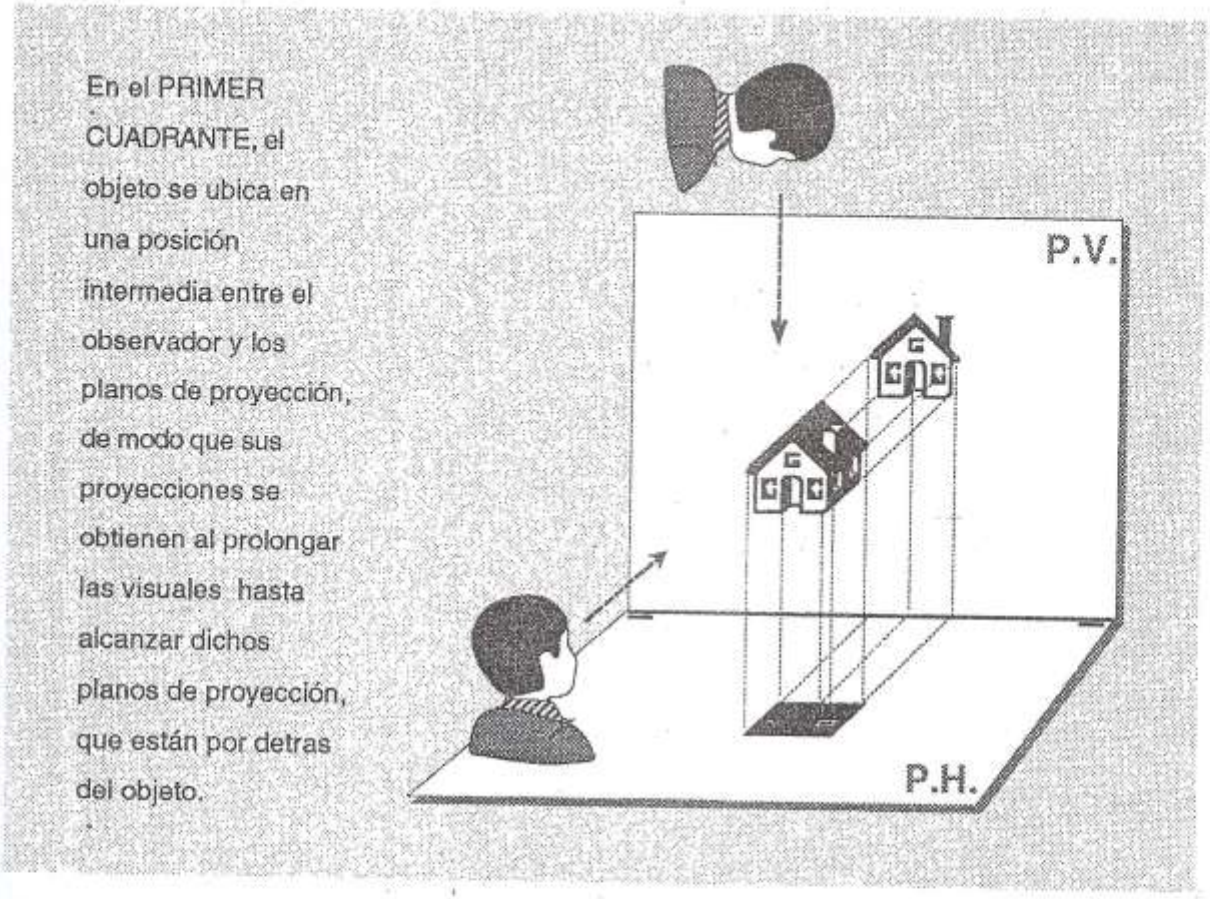
devenir de la geometría, son las razones de orden práctico las que han amparado su validez.

Las concepciones filosóficas, el estado de evolución tecnológica y científica, el desenvolvimiento social, son entre muchos otros, elementos que inciden definitivamente en la manera de concebir las respuestas a los problemas, sea cual sea su naturaleza. Es así que la utilidad de los instrumentos no es permanente en el tiempo; se defasa de él cuando no es capaz de adaptarse a las exigencias de los nuevos momentos. Si la Geometría de Monge fué una revelación en su origen, lo fue a favor de las necesidades de su propio tiempo. Hoy, a más de doscientos años del nacimiento de la Geometría Descriptiva de Monge, parece sensato verificar su vigencia.

La Geometría Descriptiva es básicamente un instrumento de análisis gráfico y comunicación de la realidad tridimensional. Si la concebimos en estas dimensiones, es obvio que su eficiencia debe medirse en función de su capacidad de satisfacer esa, su naturaleza. A ese fin, pareciera sano "desnudar" la Geometría Descriptiva de Monge, y despojarla de todo aquello que no nos sea útil. Podemos deshacernos de aquellos elementos del sistema que resulten superfluos y que tiendan a crearnos confusión, y solo conservar de él, los que verdaderamente nos permitan manipular la realidad tridimensional de una manera eficiente y exclusivamente en función de los fines que le son propios. Veamos.

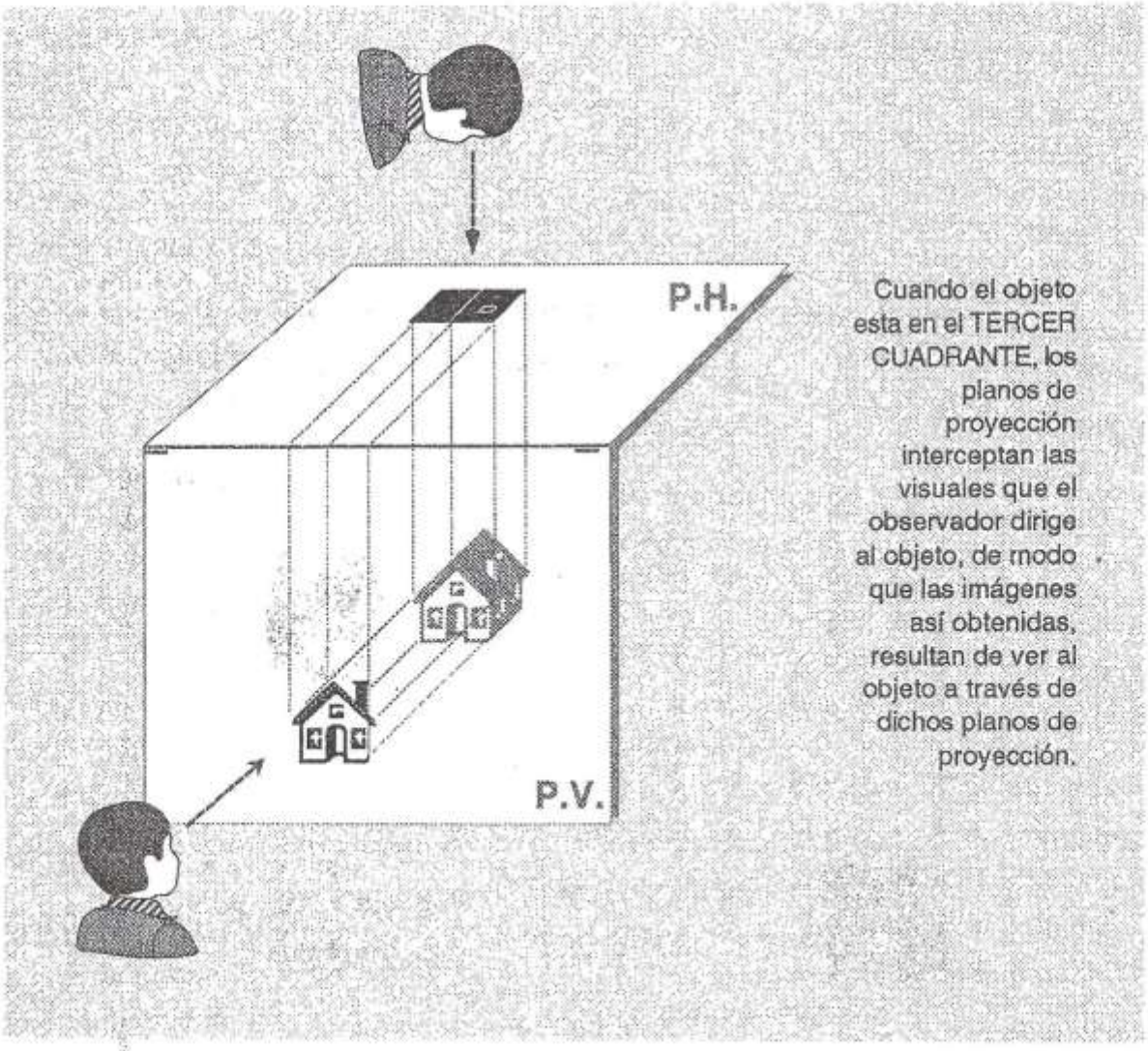
Como ya señalamos, las imágenes obtenidas en los cuadrantes pares, se confunden al ser reproducidas en Doble Proyección Ortogonal, situación que no ocurre con los cuadrantes impares; de manera que podemos descartar definitivamente la posibilidad de manejar objetos ubicados en cuadrantes pares.

A partir de aquí, solo quedan dos modos de conceptualizar el sistema diedrico; o bien a partir del uso del primer cuadrante, o a partir del uso del tercero. En el primer cuadrante, quien observa al objeto lo hace "proyectando" respectivamente sus imágenes, sobre las superficies anterior del plano horizontal y superior del plano vertical, las cuales se encuentran en los extremos diametralmente opuestos a los puntos de observación. La figura siguiente nos recuerda esa forma de ordenar los protagonistas del sistema diédrico.



Si el objeto ocupase el tercer cuadrante, el observador lo vería a traves de las superficies posterior del plano horizontal e inferior del plano vertical, próximos a él, tal como lo sugiere la figura siguiente. Esta forma de representación, constituye el

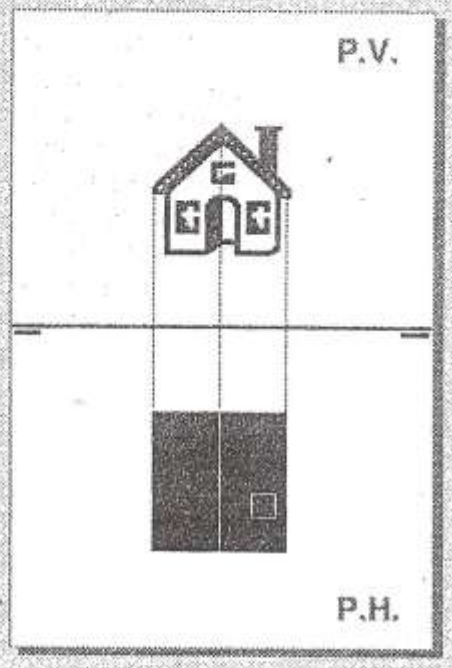
punto de partida del "Sistema Americano", que dispone los protagonistas del Sistema Diédrico como si de hecho estuviesen ubicados en ese cuadrante del Sistema Europeo.



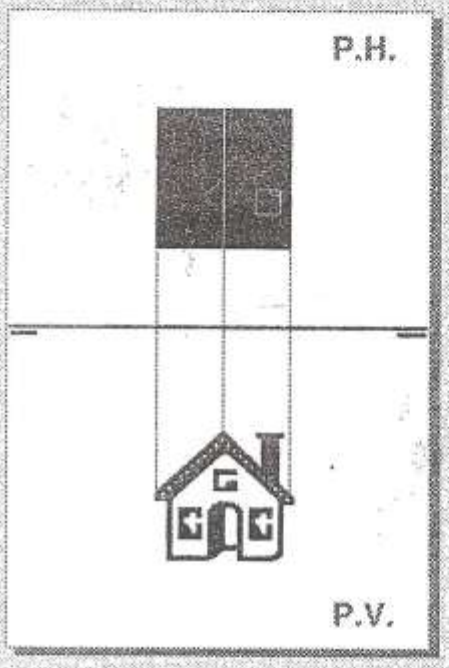
A diferencia del Sistema Europeo, el Sistema Americano no puede prescindir de la presencia protagónica del observador en el escenario de la Doble Proyección Ortogonal. El "observador" (que no es otro que cada uno de nosotros), es fundamental como perceptor de la realidad que representa en el escenario

diédrico. Debido a ello, las formas de operar del Sistema Americano se derivan de la tipificación de las diversas posiciones que el observador puede ocupar con respecto a los objetos. De allí que, en este contexto, los procedimientos aplicados a la resolución de los problemas nazcan de esta interacción dinámica establecida entre ambos protagonistas.

Aparte del hecho que las representaciones en el primer y el tercer cuadrante solo difieren en la presentación invertida de las posiciones de las proyecciones horizontal y vertical, desde el punto de vista práctico, el concepto mencionado en el párrafo precedente con respecto a los procedimientos, es aplicable por igual a ambas formas de interpretar la disposición de los protagonistas del sistema.



La proyección diédrica en el PRIMER CUADRANTE nos muestra la proyección vertical por arriba de la línea de tierra y la horizontal por debajo.



La proyeccón diédrica en el TERCER CUADRANTE nos muestra las proyecciones invertidas con respecto a su representación en el primer cuadrante.

Debido a que en nuestros programas de estudio de la Geometría Descriptiva, el uso de la Doble Proyección Ortogonal se ha fundamentado tradicionalmente en la concepción "europea", nos hemos familiarizado con la "idea" de una proyección horizontal ubicada por debajo de la Línea de Tierra y una vertical por encima de ella. Consecuentemente, los procedimientos que se suele aplicar a lo largo de los dos períodos de estudio de esta materia, están ajustados a esa concepción tradicional, razón por la cual, el desarrollo de los procedimientos en función de la disposición que el Sistema Americano hace de los protagonistas en el escenario diédrico, no será considerado por nosotros. Por ello será el primer cuadrante el territorio en el cual haremos todas las representaciones de los eventos que trataremos en adelante.

LOS METODOS EN DOBLE PROYECCION ORTOGONAL

De acuerdo a todo lo que hemos discutido hasta ahora, no será difícil comprender que la apariencia de las imágenes que percibimos de los objetos, es una consecuencia directa de la posición relativa que mantenemos con respecto a ellos. Esta idea, trasladada al ambiente de la Doble Proyección Ortogonal (DPO), se expresaría entonces afirmando que la apariencia de las proyecciones ortogonales, depende directamente de la posición relativa que mantienen entre sí, el objeto y los planos donde el mismo se proyecta. ¿Qué quiere decir esto? Que cualquier cambio de la posición relativa entre objeto y observador, se expresa en Doble Proyección Ortogonal, como un cambio de la posición relativa entre el objeto y los planos de proyección. Así, en la misma medida que varían las imágenes que percibimos al observar los objetos, varían las proyecciones que representamos de ellos. En síntesis, cuando se altera la posición relativa entre objeto y observador para ofrecernos una nueva imagen, se altera consistentemente, la posición relativa entre objeto y planos de proyección en el espacio diédrico para brindarnos una nueva proyección. Es así que entenderemos, que **cualquier cambio de la posición relativa entre objeto y planos de proyección es una expresión directa de los**

cambios de la posición relativa entre objeto y observador.

Ahora bien, la posición relativa entre un objeto y un observador se puede alterar por efecto de dos ocurrencias; o bien se mueve el objeto mientras el observador permanece en una posición fija ocupando sus puntos de vista (no olvidemos que en DPO el observador ocupa dos posiciones simultáneas) o, mientras el objeto permanece en una posición fija, quien se desplaza es el observador. Es precisamente de estas dos ocurrencias, de donde se desprenden los diversos procedimientos que se aplican a la resolución de problemas en DPO, procedimientos que podríamos discriminar en dos grandes grupos; por una parte, el de aquellos que intervienen directamente sobre el objeto (dinámica sobre la cual opera el Sistema Europeo), y por la otra, el del que se aplica sólo al observador (caracteristico del Sistema Americano) .

Toda vez que las cualidades morfológicas de los objetos geométricos varían de acuerdo a su naturaleza, en general, los procedimientos dependen tanto de ella, como de la propia naturaleza del problema que se pretende resolver. Es obvio entonces que a su vez, la naturaleza misma de dichos procedimientos se derive directamente de las relaciones geométricas internas entre los elementos del objeto, si las hay, y entre éstos y su contexto. En la Doble Proyección Ortogonal , los procedimientos aplicados al objeto afectan exclusivamente a rectas y planos, y aún así ocurre en la resolución de problemas donde es necesario construir cuerpos volumétricos, en los cuales se acude a la aplicación sucesiva de los distintos procedimientos en un orden determinado por la naturaleza própia del problema a resolver. En conjunto, estos procedimientos así ejecutados, conforman un método que —dada su naturaleza— nosotros llamaremos **método aditivo**.

Por su parte, el procedimiento que se aplica al observador, se apoya en su libertad de cambiar de posición con respecto al objeto, permitiéndonos percibir —a nuestra conveniencia— imágenes distintas del mismo. Para los fines propios de la

resolución de problemas en DPO, esta dinámica se desarrolla exclusivamente al inducir los planos a moverse para mostrarnos cuatro proyecciones fundamentales a saber: 1- la proyección de una recta como un punto (rectas DE PIE y DE PUNTA), 2- su proyección en posición de verdadero tamaño (rectas FRONTAL, HORIZONTAL, DE PIE, DE PUNTA Y PARALELA A L.T.), 3- la proyección de un plano como una línea recta (planos FRONTAL, HORIZONTAL, PROYECTANTE VERTICAL, PROYECTANTE HORIZONTAL, y DE PERFIL), y 4- su proyección en posición de verdadero tamaño (planos FRONTAL y HORIZONTAL)[1].

LAS VISTAS MULTIPLES - EL CAMBIO DE PLANOS

La interacción dinámica que establecemos al percibir visualmente los objetos del mundo real o del mundo imaginario, bien puede entenderse como una secuencia ininterrumpida y coherente de imágenes distintas y sucesivas; una cadena donde la progresión perceptiva depende del cambio contínuo de la posición relativa entre los objetos percibidos y el punto de vista en que nos ubicamos, tal como ocurre cuando nos desplazamos alrededor de una escultura, de una persona o de un automovil; o cuando movemos un objeto en nuestras manos para percibir todas sus facetas y poder comprenderlo, o mejor aún cuando damos vueltas a cualquier objeto en nuestra imaginación para reconocerlo. El objeto se nos revela en su totalidad a través de una lectura en una progresión secuencial de imágenes sucesivas donde no hay separación alguna entre ellas.

En el contexto del Sistema Diédrico, el movimiento así entendido puede ser expresado en forma gráfica, gracias a su flexibilidad que hace posible la representación de una secuencia de múltiples vistas de un mismo objeto a través de un sencillo mecanismo de translación de los planos de proyección. La ubicuidad de este procedimiento le otorga una aplicabilidad a la que se somete la mayoría de

[1]. Ver Posiciones Particulares de la Recta (Pag. 60) y Posiciones Particulares del Plano (Pag. 107)

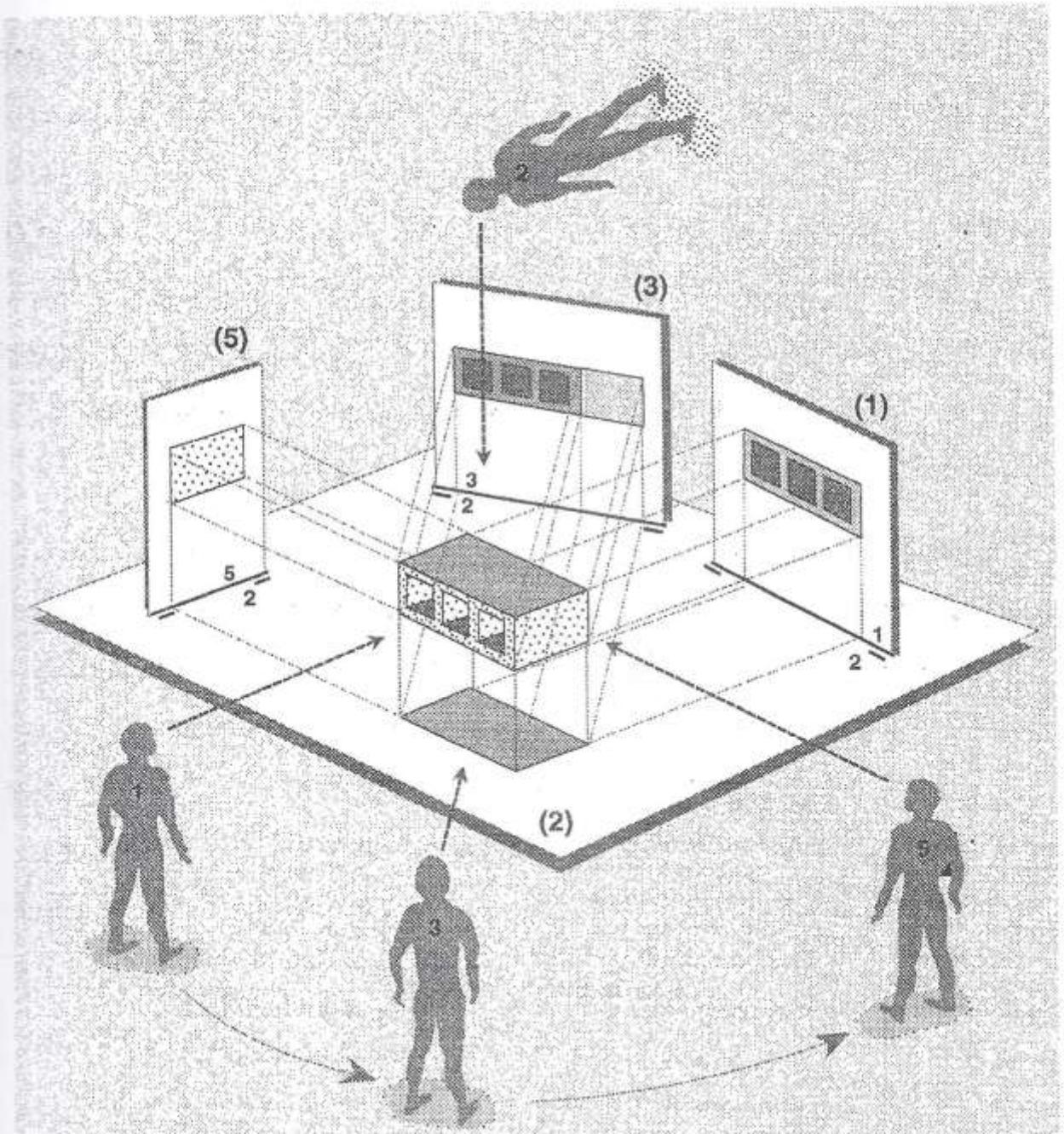
los problemas que maneja este sistema de proyección, de modo que —en el contexto de problemas complejos cuya solución se alcanza mediante la aplicación de una secuencia de pasos— adquiere el caracter de un método que, por esta razón, en adelante identificaremos como **método integral**.

El intento de reproducir gráficamente la cadena perceptiva que nos ofrece el movimiento, nos obligaría inevitablemente a representar una secuencia de imágenes congeladas, diferenciadas una de la otra por breves detalles relevantes a cada una de ellas, tal como nos lo ofrece una cinta cinematográfica, donde se registra una secuencia de imágenes estáticas, muy parecidas una a la siguiente. No hay movimiento, sin embargo el equipo apropiado, reanima esta secuencia y nos permite percibir, en una representación bidimensional de la realidad, la progresión ilusoria del movimiento.

Para los fines que nos interesan, la reproducción del movimiento en si mismo no será crucial. No obstante, no podemos dejar de considerarla, pues en su existencia radica una propiedad de este sistema de proyección, la cual consiste precisamente en su capacidad de permitir expresarlo gráficamente, lo cual le imprime una utilidad excepcional como recurso de análisis gráfico y de interpretación de la realidad tridimensional, al poder representar a conveniencia una secuencia coherente de imágenes distintas de un mismo objeto, que no son sino la expresión de la misma secuencia que el observador percibe cuando se desplaza alrededor del mismo.

Dentro de nuestro discurso, ya es claro que si nos movemos a distintas posiciones para observar un objeto, las imágenes que sucesivamente percibimos de él, cambian de forma según cambia el punto de vista desde el cual lo vemos.

Como ya explicamos al describir los elementos del Sistema Diédrico, podemos imaginarnos a nosotros mismos ubicados frente a un objeto cuya imagen percibimos y representamos sobre una superficie plana ("paralela" a nuestra retina, o dicho de otro modo, perpendicular a nuestra linea visual) colocada por detrás del objeto, en una posición diametralmente opuesta a nosotros, como nos lo muestra la ilustración de la página siguiente.



En esta ilustración observamos cómo, manteniendo fija la posición de observación 2, nos desplazamos desde la posición de observación **1**, sucesivamente hasta la **3** y la 5, lo cual induce el desplazamiento consistente del plano vertical de proyección, desde **(1)** hasta **(3)** y **(5)**, sobre el plano horizontal de proyección **(2)** que no cambia su posición, permitiendo el registro de las distintas imágenes que percibimos en cada momento, sobre los planos de proyección correspondientes. Observe cómo se mantiene la relación de ortogonalidad entre las visuales tendidas entre cada posición de observación y el plano respectivo, lo cual es indicativo de que cada desplazamiento del observador es replicado por un desplazamiento consistente del plano correspondiente.

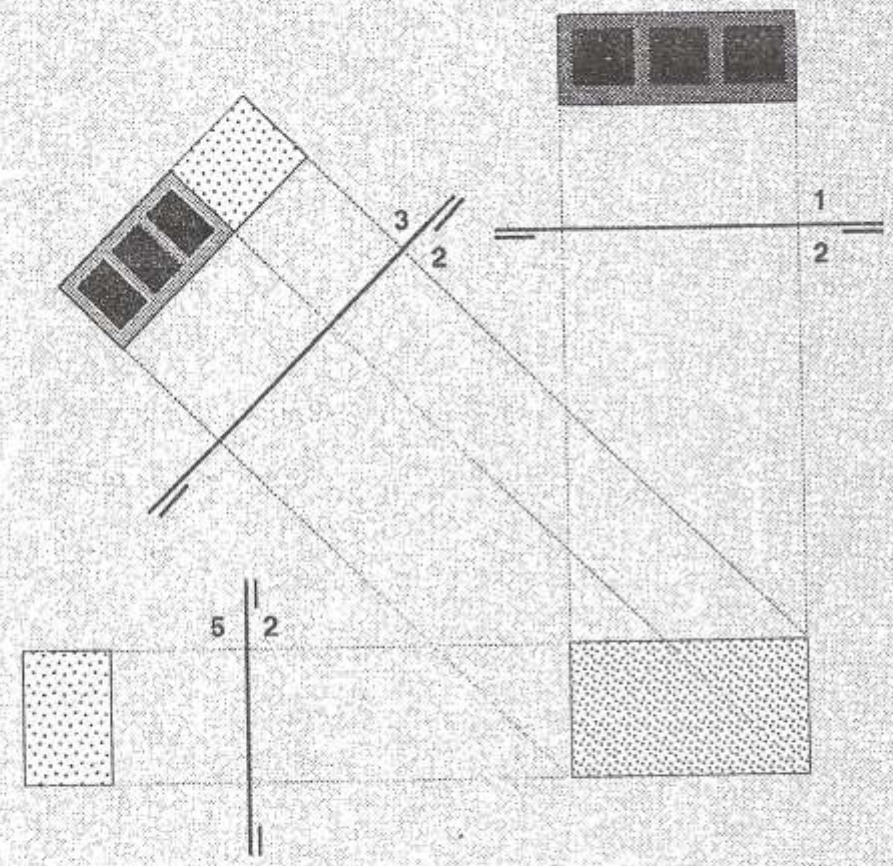
En estas condiciones, la superficie de proyección se mantendrá tan ineludiblemente asociada a nosotros como también lo está nuestra propia retina; de modo que podemos pensar que ambos elementos - el plano de proyección y nuestra retina - siempre son "paralelos" [1]. De modo que si nos desplazamos en forma sucesiva desde la posición "1" hasta la "3" y la "5", el plano de proyección correspondiente también lo hace manteniendo su posición relativa dentro del sistema, y así cada imagen distinta percibida por nosotros, es respectivamente representada sobre la posición correspondiente de dicho plano.

Es muy fácil reproducir la presentación de estas imágenes en proyección diédrica, si imaginamos que, una vez obtenidas las mismas sobre los planos de proyección, descartamos la presencia del objeto y " tumbamos " los planos impares hacia atrás, de manera que arrastren consigo las imágenes reproducidas sobre ellos. En estas condiciones, todos los planos coinciden con el plano horizontal y muestran sus respectivas intersecciones con él en las Líneas de Tierra 1/2, 3/2 y 5/2, las cuales, en la representación diédrica, expresan en su relación con la proyección horizontal, las mismas posiciones que en el espacio cada uno de los planos impares tiene con respecto al objeto.

La figura siguiente es la representación diédrica de la misma situación que nos ha mostrado la figura anterior en el espacio. Comparémoslas cuidadosamente a la luz de la información que nos ha brindado el párrafo anterior, y comprobaremos la veracidad de cuanto ha sido postulado.

---

[1] Esta pequeña disgresión semántica es válida para permitirnos figurar lo que queremos explicar, pues solo podríamos hablar con propiedad de paralelismo entre ambos elementos si nuestra retina fuese plana.



L.T. 1/2 representa al sistema principal, mientras que L.T. 3/2 y L.T. 5/2 representan sistemas secundarios.

Las proyecciones vertical "1" y horizontal "2", son las proyecciones principales, mientras que las proyecciones "3" y"5" —de origen vertical en este caso— son proyecciones auxiliares.

Las parejas de proyecciones "1" y"2", "3" y "2", y "5" y "2", son respectivamente complementarias o adyacentes, mientras que las "1", "3" y"5" se relacionan entre sí como proyecciones alternas.

La distancia entre las proyecciones impares y sus respectivas Líneas de Tierra son exactamente iguales

REPRESENTACION DIEDRICA DE UNA SECUENCIA DE VISTAS MULTIPLES DE UN BLOQUE DE CONCRETO MANTENIENDO FIJO EL PLANO HORIZONTAL (2)

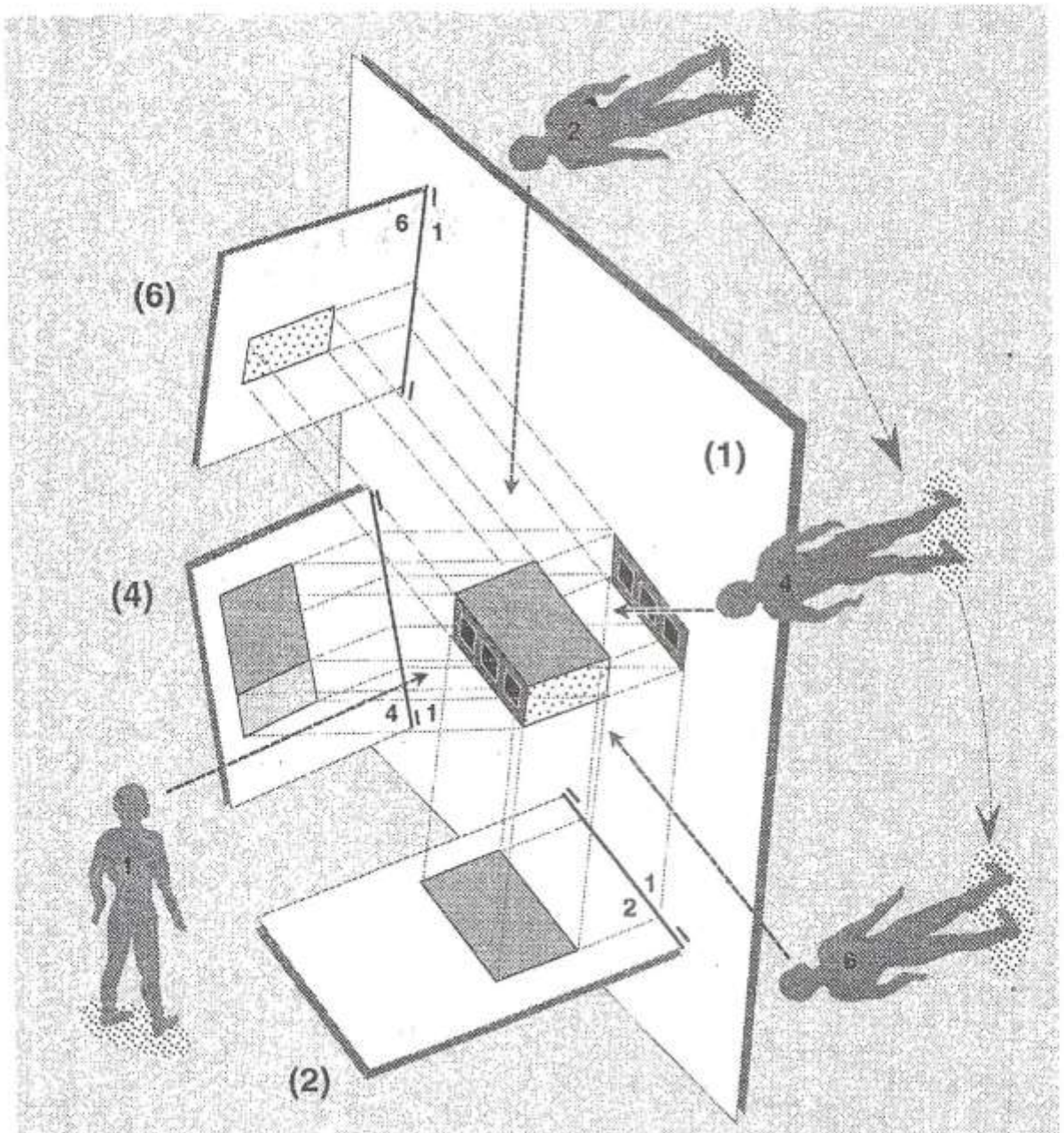
La dinámica del movimiento de los planos de proyección se ordena dentro del Sistema Diédrico gracias a la disposición ortogonal de los mismos, lo que permite

el desplazamiento de uno sobre el otro mientras no se altere esa relación, y siempre que uno de ellos permanezca fijo.

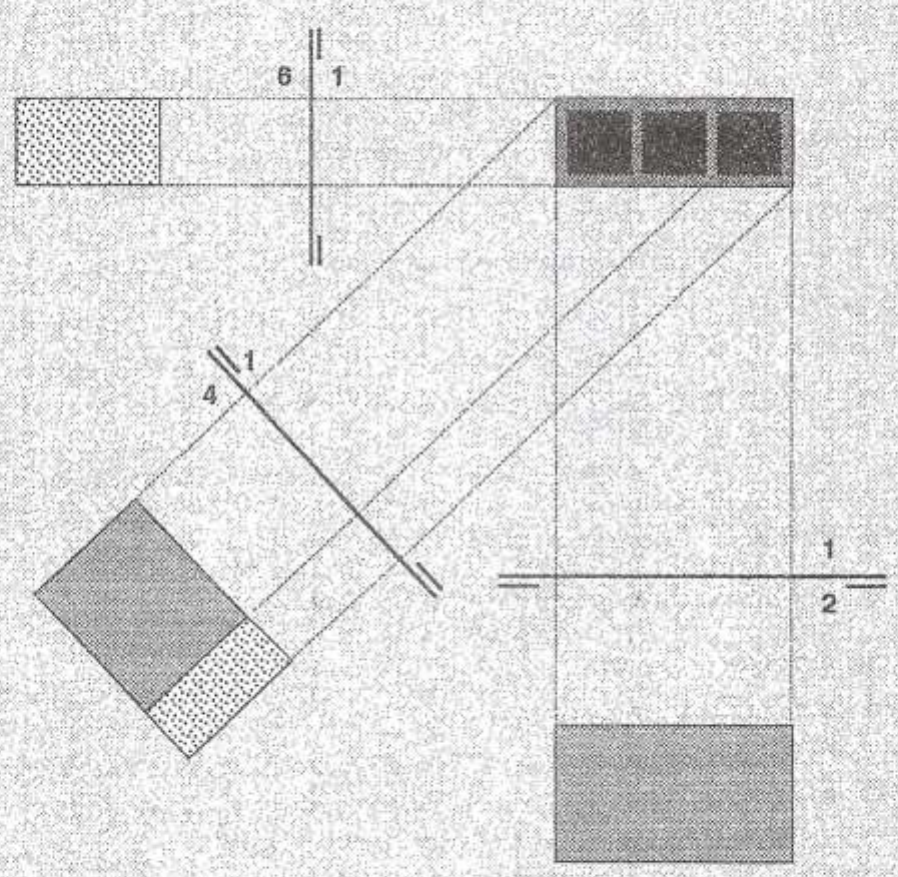
La libertad de decidir cual de los planos expresa el inicio del movimiento del observador depende siempre de la naturaleza del problema a resolver. La clave fundamental del procedimiento consiste en que mientras los planos de proyección se mantengan ortogonales entre sí, **siempre es posible expresar gráficamente el desplazamiento de un plano sobre el otro, mientras uno de ellos permanezca fijo**. Es así entonces que las mismas proyecciones que nos ofrece el sistema principal del primer caso ilustrado, pueden manipularse asumiendo que el plano que se mantiene fijo es el vertical y que el horizontal se desplaza sobre él, ocupando sucesivamente las posiciones **"2", "4" y "6"**, como lo revelan las figuras espacial y diédrica en las páginas siguientes.

Observe cómo los mismos criterios establecidos con relación al caso anterior pueden ser replicados en este caso. De hecho, la representación diédrica no es sino el resultado de " tumbar " los planos pares sobre el plano vertical **"1"** una vez, naturalmente, que el objeto ha sido retirado del escenario, para manipularlo a través de sus proyecciones.

Todos los planos comparten su posición en una misma superficie, y al presentarse de manera que coincidan con la superficie de representación —en este caso el papel— obtenemos la imagen diédrica que nos ofrece la figura correspondiente, en la página 46.



La situación que nos ilustra esta figura es semejante a la anterior, solo que aquí hemos decidido no movernos de la posición de observación **1** para mantener fijo al plano vertical en la posicion **(1)**, y permitir nuestro movimiento desde **2** hasta **4** y **6**. Así "arrastramos" al plano horizontal, que se desplaza de la misma forma, desde **(2)** hasta **(4)** y hasta **(6)**, permitiéndonos en cada caso representar sobre él , cada nueva imagen que percibimos del bloque en la posición de observación respectiva.



L.T. 1/2 representa al sistema principal, mientras que L.T. 1/4 y L.T. 1/6 representan sistemas secundarios.

Las proyecciones vertical "**1**" y horizontal "**2**", son las proyecciones principales, mientras que las proyecciones "**4**" y "**6**" -de origen horizontal en este caso- son proyecciones auxiliares.

Las proyecciones **1** y **2**, **1** y **4**, y **1** y **6**, son complementarias o adyacentes, mientras que las imágenes **2**, **4** y **6** se relacionan entre sí como proyecciones alternas.

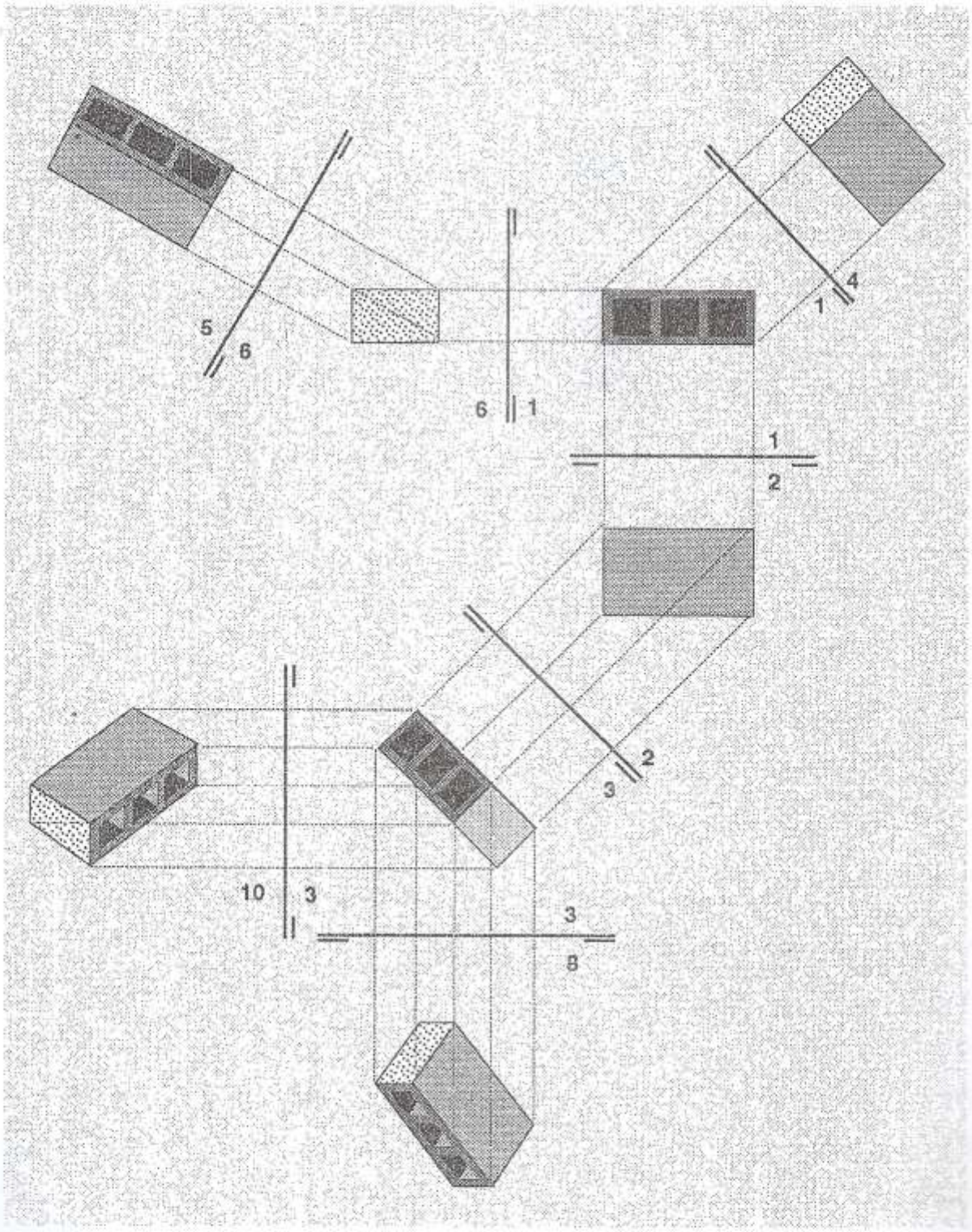
La distancia entre las proyecciones pares y sus respectivas Líneas de Tierra son exactamente iguales

REPRESENTACION DIEDRICA DE UNA SECUENCIA DE VISTAS MULTIPLES DE UN BLOQUE DE CONCRETO MANTENIENDO FIJO EL PLANO VERTICAL (1)

Si reflexionamos un poco sobre las dos situaciones que acabamos de describir, no tardaremos mucho en concluir que ambas pueden conjugarse, y si es cierto que la clave fundamental del procedimiento consiste en que **es posible expresar gráficamente el desplazamiento de un plano sobre el otro, siempre que uno de ellos se mantenga fijo**, pudiéramos pensar que los distintos planos de proyección pueden desplazarse alternativamente sobre sus planos adyacentes, en una dinámica donde el plano que se mueve, pasa luego a ser fijo y así sucesivamente. La secuencia de vistas múltiples del bloque de concreto que presentamos en la página siguiente, es una prueba evidente de esta afirmación.

Examine cuidadosamente el comportamiento de las imágenes del bloque con respecto a cada uno de los sistemas en que se encuentra respectivamente referido. Trate de reconstruir en cada caso la configuración espacial del conjunto imaginando la posición del bloque en el espacio con respecto al sistema observado, usando para ello la información que hemos manejado sobre la estructura del sistema diédrico y la dinámica del desplazamiento de los planos de proyección como consecuencia directa de nuestro desplazamiento como observadores alrededor del objeto.

Es así que, partiendo de la representación de dos proyecciones iniciales (L.T. 1/2), las cuales constituyen un SISTEMA PRINCIPAL, a cada movimiento de un plano de proyección se genera una nueva Línea de Tierra que se ubica en una posición acorde al desplazamiento del mismo. Igualmente cada una de ellas (L.T. 1/4, L.T. 3/2, L.T. 1/6 y L.T. 5/2) representa un SISTEMA SECUNDARIO, que siempre comparte una proyección con el sistema adyacente. Cada nueva proyección distinta de las principales se llama proyección auxiliar. Cada Linea de Tierra separa dos proyecciones complementarias o adyacentes. Dos proyecciones complementarias



o adyacentes tienen distinta naturaleza; una proviene de la proyección vertical; la otra, de la horizontal. Cada proyección complementaria o adyacente separa dos

o adyacentes tienen distinta naturaleza; una proviene de la proyección vertical; la otra, de la horizontal. Cada proyección complementaria o adyacente separa dos proyecciones alternas. Dos proyecciones alternas tienen la misma naturaleza, o vertical u horizontal. Por ello comparten siempre distancias semejantes a las respectivas líneas de tierra que las separan de la proyección complementaria común.

Para diferenciar cada sistema, las Lineas de Tierra se afectan con dos índices numéricos que identifican respectivamente a cada plano de proyección. Los distintos planos verticales se denominan, a partir del principal, con números impares (1, 3, 5,.....), como hemos mostrado en las ilustraciones correspondientes. Los horizontales, mientras tanto, se denotan con números pares (2, 4, 6,.....). Así, la Línea de Tierra en el sistema principal siempre se identifica con los índices 1 y 2 colocados respectivamente en el territorio del plano que denotan, uno sobre otro a un extremo cualquiera de la Línea de Tierra (L.T. 1/2). De esta forma, las proyecciones complementarias se denotan respectivamente con índices de distinta naturaleza (uno par, otro impar), mientras que las alternas se denotan con índices de naturaleza semejante (ambos pares o ambos impares). Es obvio entonces que jamás una Línea de Tierra puede afectarse, ya sea con dos índices pares o con dos impares.

Tanto las vistas múltiples como los procedimientos aplicados al objeto, tendrán un tratamiento exhaustivo como instrumentos para analizar el comportamiento de las rectas, los planos y los sólidos geométricos en el escenario diédrico, una vez que hayamos aprendido algunas definiciones elementales importantes, que encontraremos en los capítulos siguientes.

CUESTIONARIO

Responda las preguntas siguientes

1. ¿Cuáles son los elementos que integran un Sistema de Doble Proyección Ortogonal (DPO) ?
2. ¿Por qué la DPO opera con dos proyecciones ?
3. ¿Por qué la relación de ortogonalidad es fundamental para que pueda funcionar la DPO ?
4. Enuncie tres diferencias fundamentales entre el la concepción "Europea" y la concepción "Americana" del Sistema Diédrico?
5. ¿En qué radica la diferencia fundamental entre el método aditivo y el integral ?
6. ¿En qué consiste el Cambio de Planos ?
7. ¿Qué evento de la realidad espacial expresa la secuencia de imágenes de un objeto, obtenidas mediante el cambio de Planos ?
8. ¿Cuál relación básica deben mantener los planos de proyección en la DPO?
9. ¿Qué es el Sistema Principal y como se denota ?
10. ¿Qué es un sistema secundario o auxiliar y como se denota ?
11. ¿Qué es una proyección auxiliar ?
12. ¿Cuándo dos proyecciones son complementarias ?
13. ¿Cuándo dos proyecciones son alternas ?
14. ¿A través de que elemento se relacionan dos proyecciones complementarias ?
15. ¿A través de que elemento se relacionan dos proyecciones alternas ?
16. ¿Cuál es la razón fundamental que permite operar al Cambio de Planos?
17. ¿Porqué una Línea de Tierra no puede afectarse con dos índices impares?
18. ¿Cuando se habla de los métodos en DPO, cómo entiende usted la diferencia entre el INTEGRAL y el ADITIVO ?

EL PUNTO

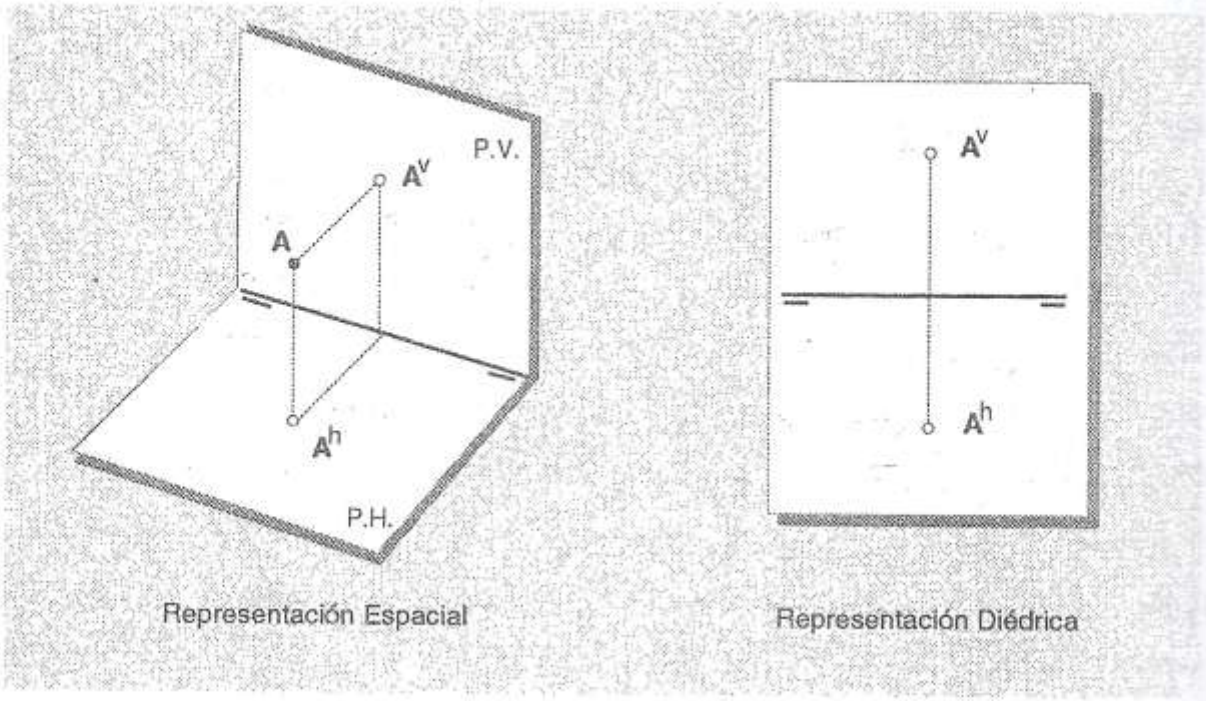
El punto se entiende sólo como concepto, puesto que como entidad palpable del mundo físico real, no existe. Desde un punto de vista matemático, podríamos decir que se trata de una esfera de diámetro igual a cero; de aquí que su materialización como un elemento de la realidad objetiva sea imposible. No obstante, su contínua intervención en todos los problemas geométricos nos obliga a representarlo gráficamente como una marca (·) semejante a la que deja la fina punta del lápiz sobre el papel; como un punto gráfico que representa al punto geométrico pero que no es él. Podemos también figurarnos la idea del punto a partir del elemento común que comparten dos rectas, o una recta y un plano, o tres planos cuando se intersectan en el espacio.

Un punto tan solo nos indica una posición en el espacio, generalmente referida a un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas. Diremos entonces que, en Doble Proyección Ortogonal, un punto está totalmente determinado cuando conocemos sus dos proyecciones, es decir, cuando conocemos las magnitudes de sus tres coordenadas X, Y y Z, que nos señalan cual es su posición en el espacio. No olvidemos jamás que las dos proyecciones de cualquier elemento o cuerpo geométrico son expresiones distintas y simultáneas del mismo; son el resultado de "ver" dicho cuerpo al mismo tiempo, desde dos posiciones distintas a partir de las cuales lo percibimos mientras nuestras visuales se dirigen perpendicularmente a los planos de proyección PH y PV. Por ello, ambas proyecciones están íntimamente ligadas, son indisociables, se complementan y constituyen una unidad que expresa al objeto real que las produce. Así es que, ningún problema de Geometría Descriptiva puede ser manipulado mientras no sean conocidas ambas proyecciones de los puntos que intervienen en él.

5. EL PUNTO

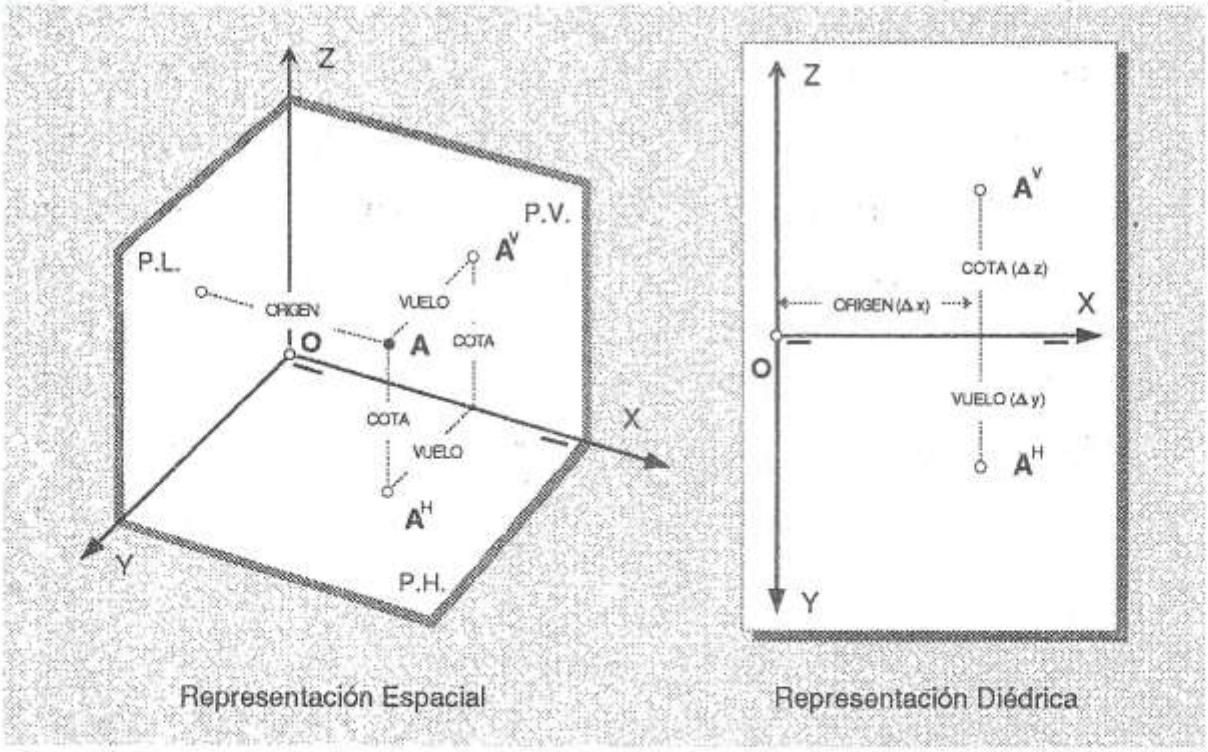
El punto en el espacio se identifica mediante letras mayúsculas A, B, C, D, ... etc, afectados de un índice que los relaciona al plano en el cual aparecen sus imágenes. Así, denotaremos como A^h, B^h, C^h, D^h, ... etc, a las proyecciones de aquellos puntos que aparecen en el plano horizontal de proyección, mientras que a las proyecciones verticales las identificaremos como A^v, B^v, C^v, D^v, ... etc.

En la representación Diédrica, un punto cualquiera "A" es entonces identificado mediante sus dos proyecciones "A^h" y "A^v", las cuales aparecen invariablemente ubicadas sobre una misma línea de referencia, perpendicular a la Línea de Tierra.



La necesidad de referir la posición de los objetos en el espacio con respecto a los planos de proyección se resuelve indicando las distancias de los puntos que los determinan a dichos planos, mediante un sistema de coordenadas cartesianas, compuesto -como sabemos- por tres ejes ortogonales denotados "X", "Y" y "Z", los cuales disfrutan de un punto común de intersección llamado Origen y denotado con la letra "O". La figura siguiente nos muestra como se superponen este sistema de

coordenadas y los planos de proyección. El Plano Vertical de Proyección queda así determinado por los ejes "X" y "Z", siendo el eje "Y" perpendicular a él. El Plano Horizontal de Proyección queda determinado por los ejes "X" e "Y" mientras el eje "Z" permanece perpendicular a él. Los ejes "Y" y "Z" configuran un plano de referencia llamado Lateral o De perfil [1], el cual es perpendicular al eje "X". Este eje es común a los dos planos de proyección y coincide con la Linea de Tierra.



Representación Espacial Representación Diédrica

La distancia entre un punto "A" en el espacio y su proyección horizontal "A^h", se llama COTA (Δ z), y <u>es reconocida solo en proyección vertical</u> en la distancia existente entre la proyección vertical "A^V" de dicho punto y la Linea de Tierra. De igual modo, la distancia comprendida entre el punto y su proyección vertical se conoce con el nombre de VUELO (Δ y), y <u>es solo reconocida en proyección Horizontal</u>, en la distancia que guardan entre sí la proyección horizontal "A^h" del

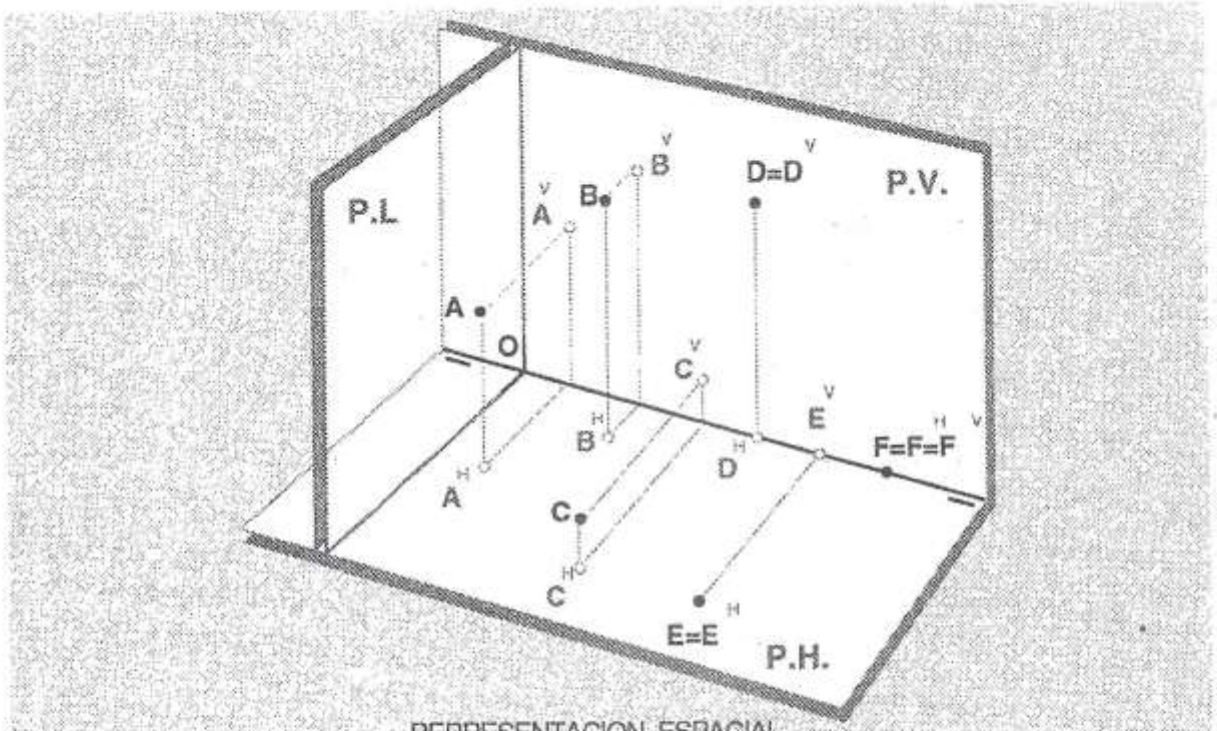
[1] A diferencia del Dibujo Ortográfico, en el contexto de la Doble Proyección Ortogonal el Plano Lateral no es usado como plano de proyección, sino como elemento referencial. De no ser así deberíamos entonces hablar de Triple Proyección Ortogonal, lo cual sería conceptualmente inconsistente.

punto y la Linea de Tierra. La coordenada que permite establecer la distancia del punto al Plano de referencia Lateral expresa su ORÍGEN (Δx), el cual se reconoce a partir de un punto de orígen (O) que se coloca sobre la Línea de Tierra, precisamente en el punto donde ella misma se intersecta con dicho plano Lateral.

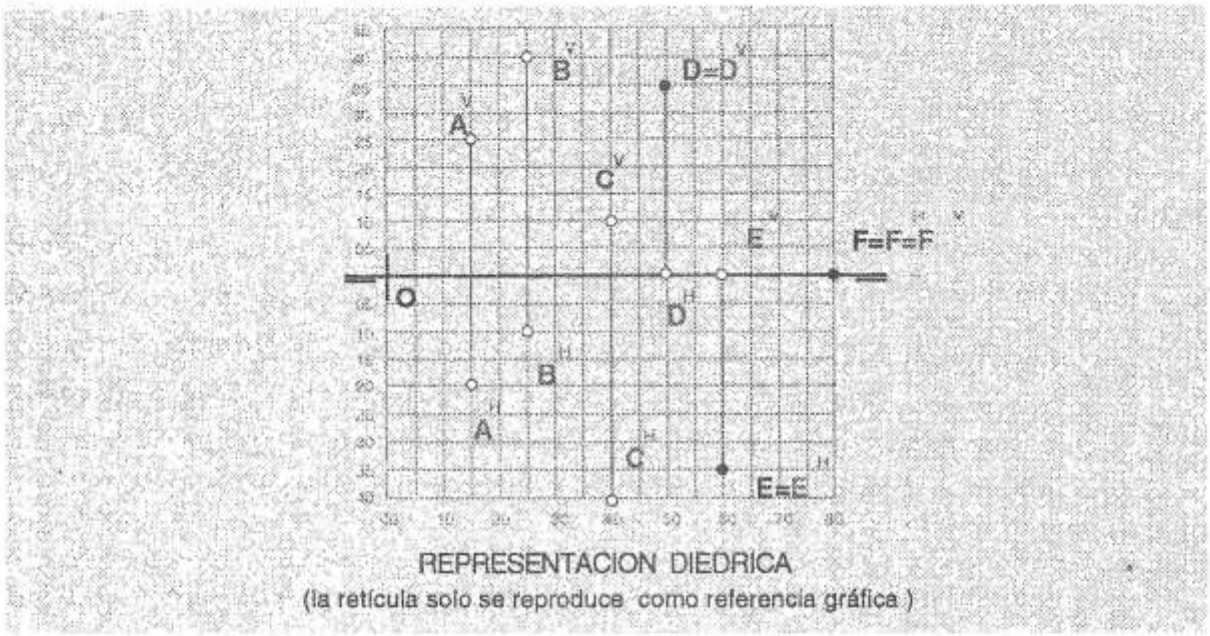
Es obvio que, de acuerdo a la diferencias de posición de un punto con respecto a los planos de proyección, sus distancias a cada uno de ellos pueden variar independientemente. Los gráficos de la página siguiente nos mostrarán las proyecciones típicas de los puntos, los cuales aparecen representados en forma espacial, diédrica y analítica.

Observe que debido a que los puntos "**D**", "**E**" y "**F**" están contenidos respectivamente en uno o ambos planos de proyección, sus proyecciones correspondientes se confunden con ellos mismos, razón por la cual, del mismo modo que en la representación espacial, aparecen señalados en la representación diédrica, en la posición que ocupan (vg.: $\mathbf{D} = D^v$; $\mathbf{E} = E^h$; $\mathbf{F} = F^v = F^h$). Ello, por supuesto, no ocurre con los puntos **A**, **B** y **C**, los cuales no encontrándose sobre alguno de los planos de proyección, no pueden aparecer representados como entidades reales en proyección diédrica. Por su parte el caracter "O", solo representa la posición del origen del sistema coordenado.

El punto constituye el elemento fundamental de referencia en Geometría Descriptiva, por lo que su presencia en todos los problemas geométricos es insoslayable. De aquí que sea fundamental aprender a reconocer con propiedad su ubicación en el espacio, ya sea a partir de sus coordenadas como de su representación diédrica.



REPRESENTACION ESPACIAL



REPRESENTACION DIEDRICA
(la retícula solo se reproduce como referencia gráfica)

A(15, 20, 25); B(25, 10, 40); C(40, 40, 10); D(50, 00, 35); E(65, 30, 00);
F(80, 00, 00). Las coordenadas del origen O se expresarían como O (00, 00, 00)

REPRESENTACION ANALITICA

CUESTIONARIO

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Dónde se encuentra ubicado un punto que tiene todas sus coordenadas iguales a Cero?
2. ¿Cómo son entre sí, la cota y el vuelo de un punto que equidista de los planos de proyección?
3. ¿Cuál es el valor del Vuelo de un punto que está en el Plano Vertical de Proyección?
4. ¿Dónde se encuentra ubicado un punto cuya cota es igual a cero?
5. ¿Cómo es —con respecto a su Cota— el Vuelo de un punto cuya distancia al plano horizontal es mayor que al plano vertical?
6. ¿Cuál es la coordenada de valor Cero de un punto contenido en el Plano Horizontal de Proyección?.
7. ¿Donde debe estar ubicado un punto para que coincida con una o ambas de sus proyecciones?
8. ¿Donde se encuentra la proyección vertical de un punto contenido en el Plano Horizontal de Proyección?
9. ¿Cuál es el valor de las coordenadas de un punto que se encuentra en el origen del sistema?
10. ¿Cuál de los puntos siguientes está mas cerca del PV ? ; ¿y del PH? ; ¿y del orígen? A (10,17,18); B (15,45,16); C (32,16,32); D (54,10,10); E (05,65,09)
11. ¿Donde está ubicado un punto cuya proyección horizontal está sobre la Linea de Tierra?
12. Si el orígen de un punto es Cero, por donde pasa la linea de referencia que contiene a sus proyecciones?
13. ¿Dónde se encuentran las proyecciones de un punto ubicado sobre la Linea de Tierra?
14. ¿Dónde se encuentra un punto que ocupa el mismo lugar que su proyección vertical? Y, ¿dónde se halla su proyección horizontal?
15. ¿Por qué —en el ámbito del Cambio de Planos— una Línea de Tierra no puede afectarse de dos indices de igual naturaleza ?
16. ¿Por qué las dos proyecciones de un punto deben siempre aparecer representadas sobre la misma línea de referencia?

LA RECTA

La idea de lo que una recta es, nos la brinda -por ejemplo- una cuerda perfectamente tensada, o la línea imaginaria que une nuestra pupila con una lejana estrella, o la intersección de dos planos, o la trayectoria que seguiría una metra que se deja caer libremente en dirección vertical.

Desde un punto de vista puramente geométrico, al igual que el punto, la recta se concibe como un ente abstracto, porque ella no tiene existencia real como cuerpo material, aún cuando es susceptible de ser representada gráficamente. De hecho, si la imaginamos como la trayectoria descrita por un punto que se mueve en el espacio en una misma dirección ...

... arribaremos a la idea de un ente con longitud pero sin espesor, cuya presencia en todos los problemas geométricos, al igual que el punto, obliga a su representación gráfica mediante un trazo discreto (——) que tan solo la expresa, mas nunca es ella en realidad.

Así pues, si queremos decir lo que una recta es, podríamos afirmar que la trayectoria descrita por un punto que se mueve en una misma dirección en el espacio, satisface esta necesidad.

Como entidad geométrica, es infinita en extensión, por lo tanto, no tiene dimensión. Su manejo en un contexto finito, determinado por las limitaciones que nos imponen tanto los medios de representación, como la extensión de nuestro campo visual, exige su representación a través de un elemento finito que la exprese.

Así, dos puntos (A y B) ...

... indican la posición de la recta " t " , y además definen un segmento AB de longitud finita el cual, además de informarnos una magnitud (AB), nos ofrece conocimiento sobre la posición de la recta (t) a la que pertenece. Un segmento expresa pues, una dirección en el espacio y una magnitud. De este modo, en adelante, la mayor parte de las referencias hechas a la recta, estarán ilustradas mediante segmentos y, salvando las restricciones semánticas, haremos muchas veces un uso indiferenciado de ambos términos para referirnos al mismo elemento.

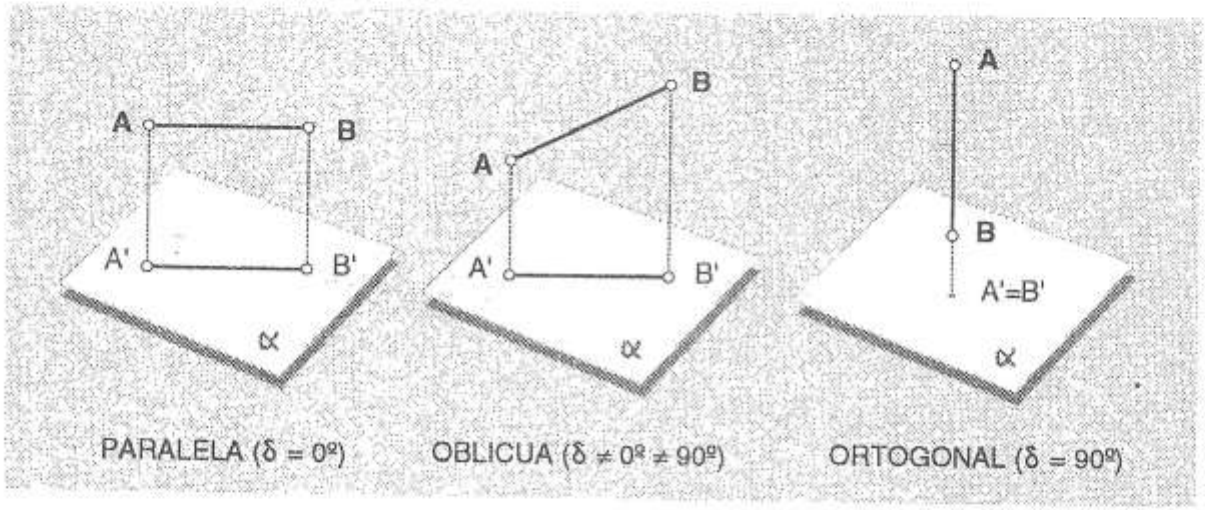
VERDADERO TAMAÑO DE UN SEGMENTO Y ANGULOS CON LOS PLANOS DE PROYECCION.

Como ya anotamos, un segmento de recta expresa una magnitud y una posición relativa. La magnitud de un segmento está expresada por su Verdadero Tamaño (VT), que es la cualidad que permite distinguir su magnitud real sobre un plano de proyección. Pensemos que cuando un segmento se proyecta ortogonalmente sobre un determinado plano, la proyección obtenida puede o no expresar la magnitud verdadera del segmento, es decir, puede o no medir lo mismo que el segmento real. En efecto, la reproducción del Verdadero Tamaño de un segmento sobre un plano de proyección, depende exclusivamente de que el ángulo entre ambos sea 0º, de manera tal que un segmento será capaz de mostrar su magnitud real en un plano de proyección, siempre que sea paralelo a su propia imagen sobre dicho plano, tal como lo veremos en todos los casos en los cuales un segmento ocupa las posiciones que conoceremos como FRONTAL y HORIZONTAL.

Por otra parte, conviene saber que el ángulo que un segmento forma con el plano en el cual se proyecta, es exactamente igual al que forma con su propia proyección sobre ese plano. En el Sistema Diédrico los ángulos formados por una recta con los Planos de Proyección Horizontal y Vertical (PH y PV), se conocen respectivamente como "α" y "β". La magnitud real del ángulo que un segmento forma con uno de los planos de proyección es solo visible cuando dicho segmento es paralelo al otro plano, en el cual dicho ángulo queda expresado por el que forma la proyección correspondiente con la Línea de Tierra. Mas adelante, cuando profundicemos el estudio de la recta, observaremos que todos los casos de RECTAS FRONTALES y HORIZONTALES, nos mostrarán las evidencias de esta afirmación.

POSICIONES PARTICULARES DE LA RECTA.

Las posiciones que pueden ocupar los segmentos con respecto a un solo plano se diferencian en solo tres categorías: 1. PARALELA, cuando forma un ángulo (δ) de 0° con él; 2. OBLICUA, cuando dicho ángulo es distinto de 0° y 90°; y 3. ORTOGONAL o PERPENDICULAR, cuando δ = 90°.



Toda vez que nuestro sistema de proyección recurre a dos planos, cada una de las POSICIONES PARTICULARES DE LA RECTA en el Sistema Diédrico, resulta de la relación simultánea de la misma con ambos planos a través de estas tres categorías, tal como lo veremos seguidamente.

RECTA PARALELA A LA LINEA DE TIERRA.

Una recta como ésta se reconoce porque es paralela, tanto al Plano Horizontal de Proyección (PH), como al Plano Vertical de Proyección (PV) . Por ello todos sus puntos mantienen una cota común y un vuelo también común (lo cual no expresa que ambas magnitudes sean iguales; son independientes). Como consecuencia de ello, es paralela a la Linea de Tierra, frontera común a ambos planos de proyección.

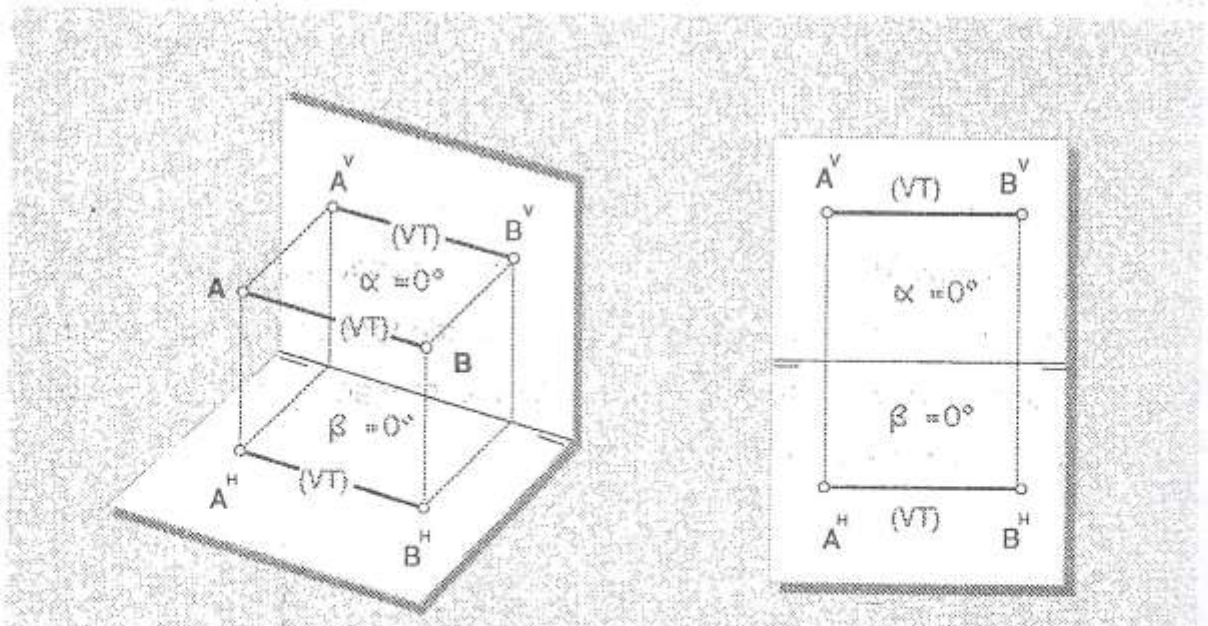


FIGURA ESPACIAL FIGURA DIéDRICA

LA RECTA **PARALELA A LA LINEA DE TIERRA**

Al ser paralela al PH y al PV, lo cual equivale a decir que forma respectivamente los ángulos $\alpha=0°$ y $\beta=0°$ con ellos, revela en ambas proyecciones su VERDADERO TAMAÑO (VT). De igual forma, la magnitud real de los mismos ángulos que ella forma en el espacio con dichos planos, es expresada por los que dichas proyecciones forman con LT.

LA RECTA **CONTENIDA EN LA LINEA DE TIERRA**

Cuando la cota y el vuelo se igualan a cero, esta recta se confunde con la Linea deTierra, de modo que sus dos proyecciones aparecen representadas en esa misma posición, es decir, confundidas con la recta "AB" que, a su vez, se confunde con la Línea de Tierra

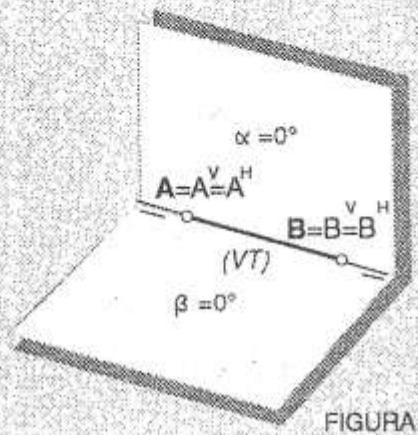


FIGURA ESPACIAL

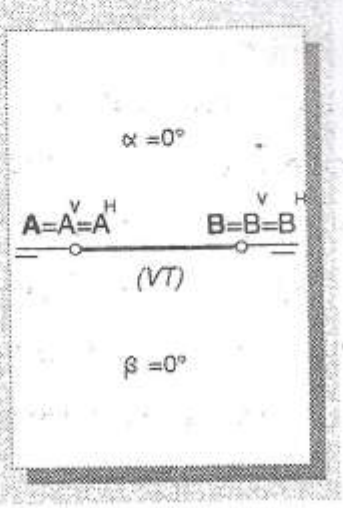


FIGURA DIEDRICA

LA RECTA **PARALELA A LA LINEA DE TIERRA** CONTENIDA EN EL PLANO VERTICAL DE PROYECCION

Cuando el vuelo se iguala a cero, la recta se ubica sobre el Plano Vertical de Proyección , de modo que se confunde con su propia proyección vertical(**AB** = AvBv), y su proyección horizontal (AhBh) queda contenida en la Línea de Tierra.

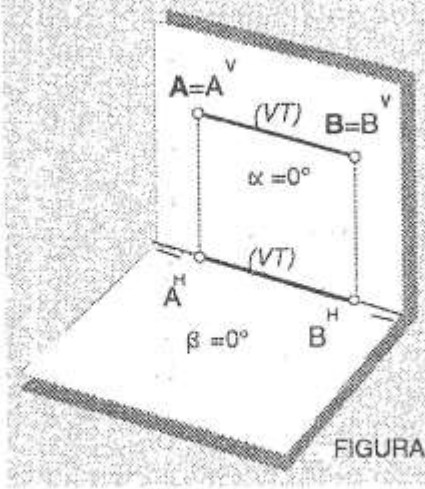


FIGURA ESPACIAL

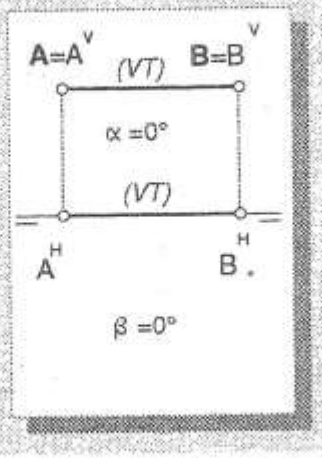


FIGURA DIEDRICA

LA RECTA **PARALELA A LA LINEA DE TIERRA** CONTENIDA EN EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCION

Cuando la cota es igual a cero, la recta se confunde con el Plano Horizontal de Proyección y, consecuentemente, con su propia proyección horizontal (AB=AhBh). Su proyeccion vertical (AvBv) queda contenida en la Línea de Tierra

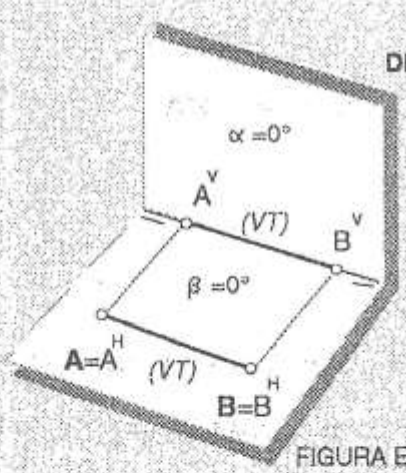


FIGURA ESPACIAL

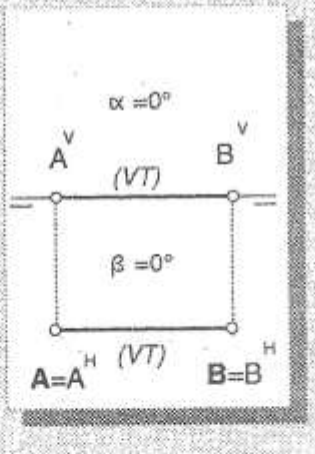
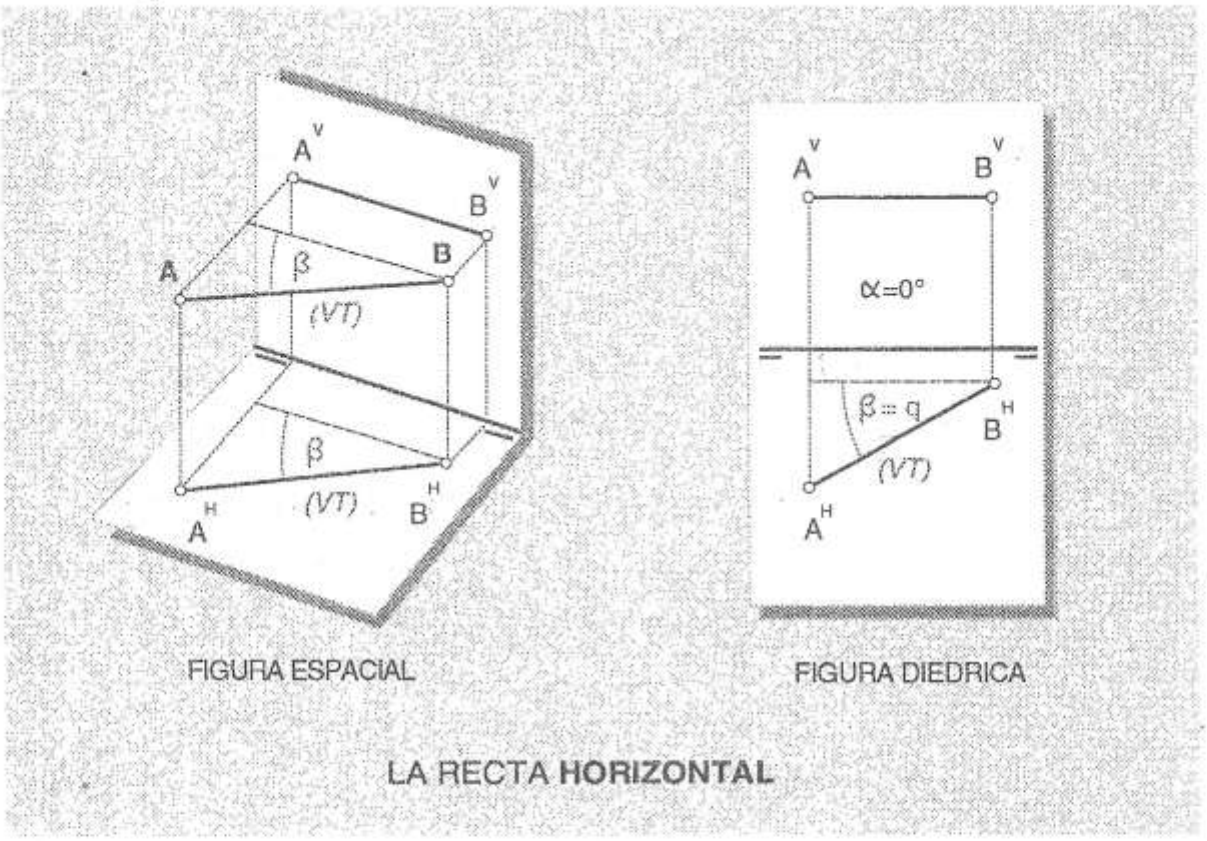


FIGURA DIEDRICA

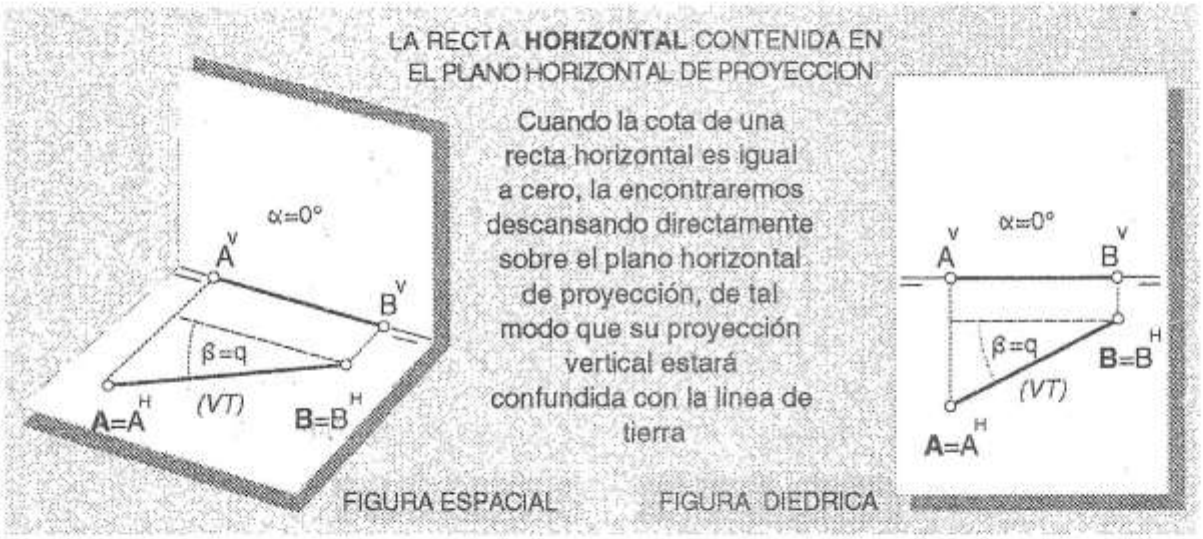
RECTA HORIZONTAL

Una recta Horizontal se reconoce en el espacio, en general, por ser paralela al Plano Horizontal de Proyección. Por ello, las cotas de todos sus puntos son semejantes y, consecuentemente su proyección vertical es, en general, paralela a la Linea de Tierra. Su proyección horizontal, ademas de revelar el VT del segmento, expresa, junto a LT, la magnitud real del ángulo "β", el cual puede alcanzar cualquier valor comprendido entre 0° y 90° inclusive, mientras que la proyección vertical, siendo paralela a LT, revela en su ángulo con ella, la magnitud real del ángulo α=0°.



El nombre de RECTA HORIZONTAL, en general, queda reservado para aquellas rectas que, siendo paralelas al PH, son oblícuas con respecto al PV, puesto que aquellas que conservan aquella condición y forman ángulos notables con el PV (0° y 90°),

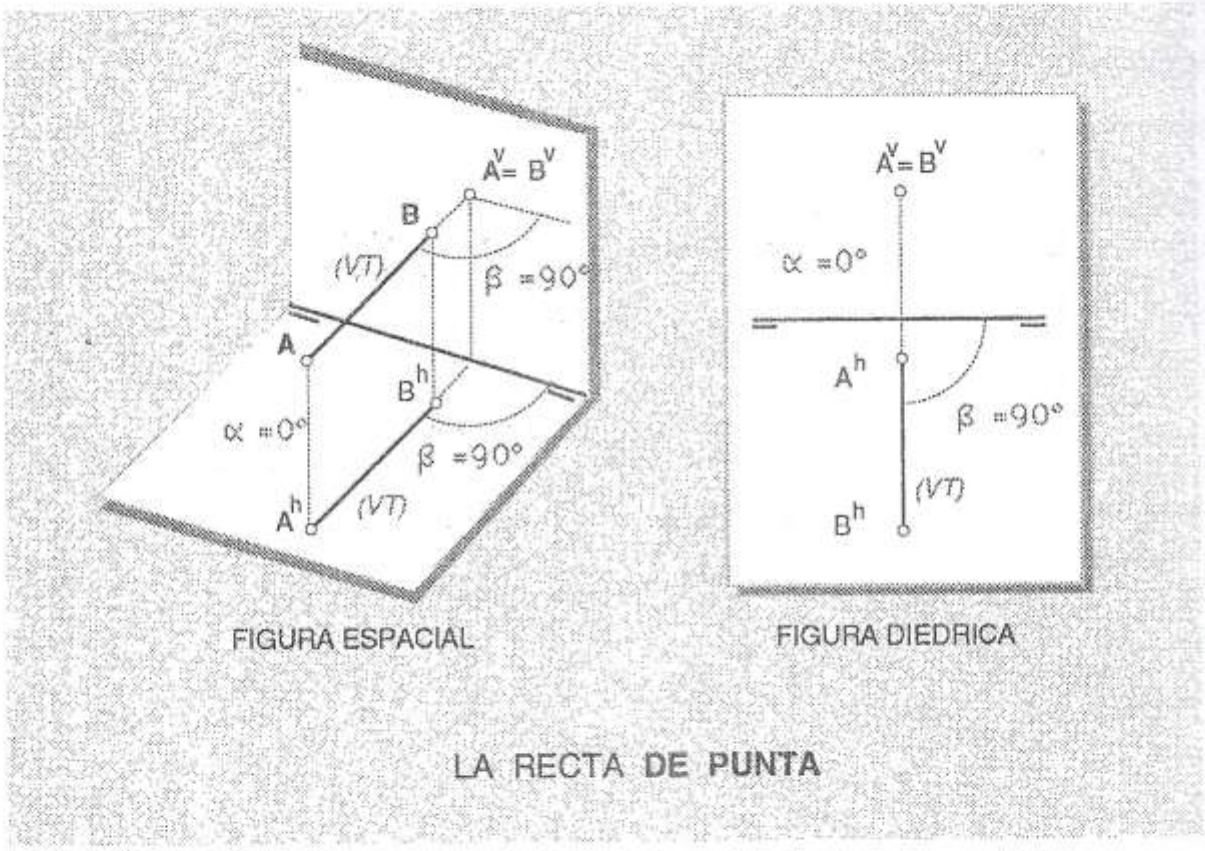
destacan propiedades que las particularizan, por lo que son denotadas con nombres que las distinguen como *Recta Paralela a LT* y *Recta de Punta*, respectivamente.

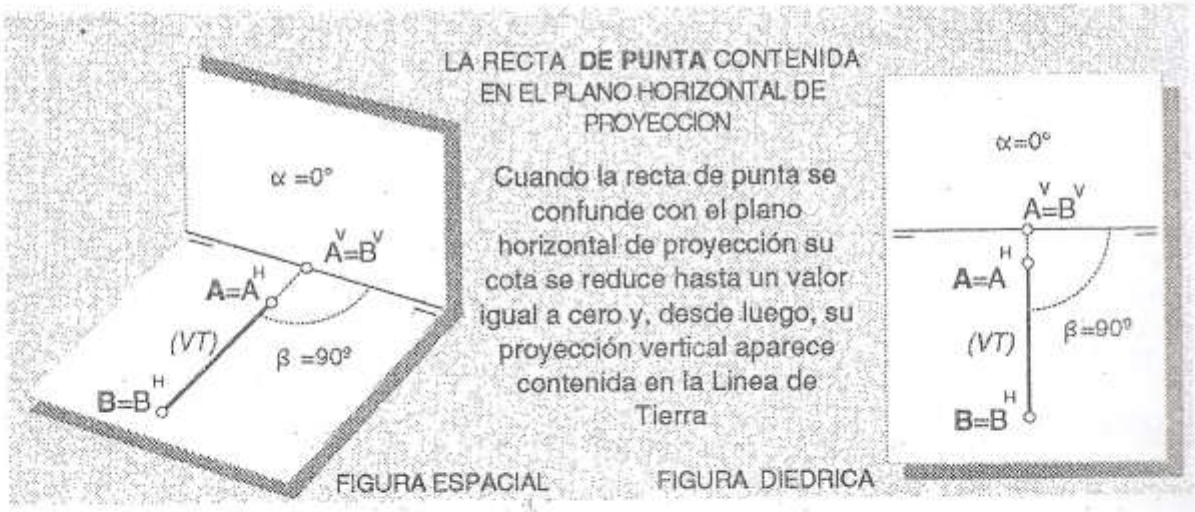


RECTA DE PUNTA

Una recta DE PUNTA es, en el espacio, perpendicular al PV, es decir, forma un ángulo $\beta=90°$ con él y consecuentemente, es paralela al PH ($\alpha=0°$). Su proyección vertical recoge en un solo punto, las de todos los puntos de la recta. Su proyección horizontal es perpendicular a LT, y revela el VT del segmento real que la define.

Si bién, el ángulo $\alpha=0°$ no es directamente revelado por la relación de su proyección vertical (que es un punto) con LT, su magnitud es fácilmente comprensible gracias a la relación de paralelismo que guarda dicha recta con el PH, razón por la cual, además, satisface todas las propiedades de una Recta Horizontal. La magnitud del ángulo "β", es efectivamente revelada en forma directa al apreciar el ángulo que forma la proyección horizontal con LT.

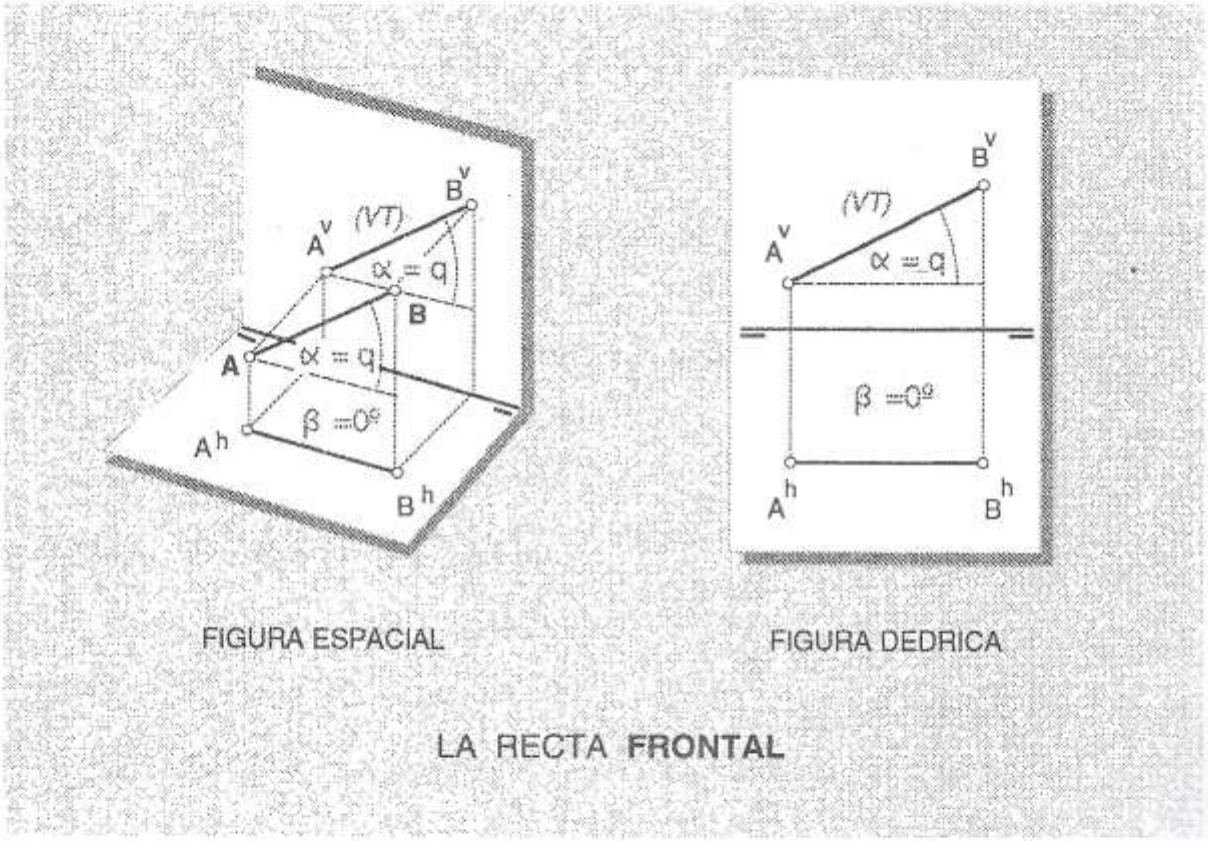

A^v= B^v
B
(VT)
β =90°
A
B^h
α =0°
β =90°
A^h
(VT)
FIGURA ESPACIAL
A^v=B^v
α =0°
A^h
β =90°
(VT)
B^h
FIGURA DIEDRICA
LA RECTA DE PUNTA


LA RECTA DE PUNTA CONTENIDA EN EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCION
Cuando la recta de punta se confunde con el plano horizontal de proyección su cota se reduce hasta un valor igual a cero y, desde luego, su proyección vertical aparece contenida en la Linea de Tierra
α =0°
A^v=B^v
A=A^H
(VT)
β =90°
B=B^H
FIGURA ESPACIAL
α=0°
A^v=B^v
A=A^H
(VT)
β=90°
B=B^H
FIGURA DIEDRICA

RECTA FRONTAL

La recta FRONTAL se reconoce, en el espacio, por ser paralela al PV, es decir por formar con él un ángulo $\beta = 0°$. En consecuencia, su proyección horizontal es paralela a LT, y al mantener un vuelo constante, revela en su ángulo con LT, la magnitud real de $\beta = 0°$. Por su parte, la proyección vertical revela el VT de la recta, y expresa en su ángulo con LT, la magnitud del mismo ángulo "α" que ella forma con el PH.

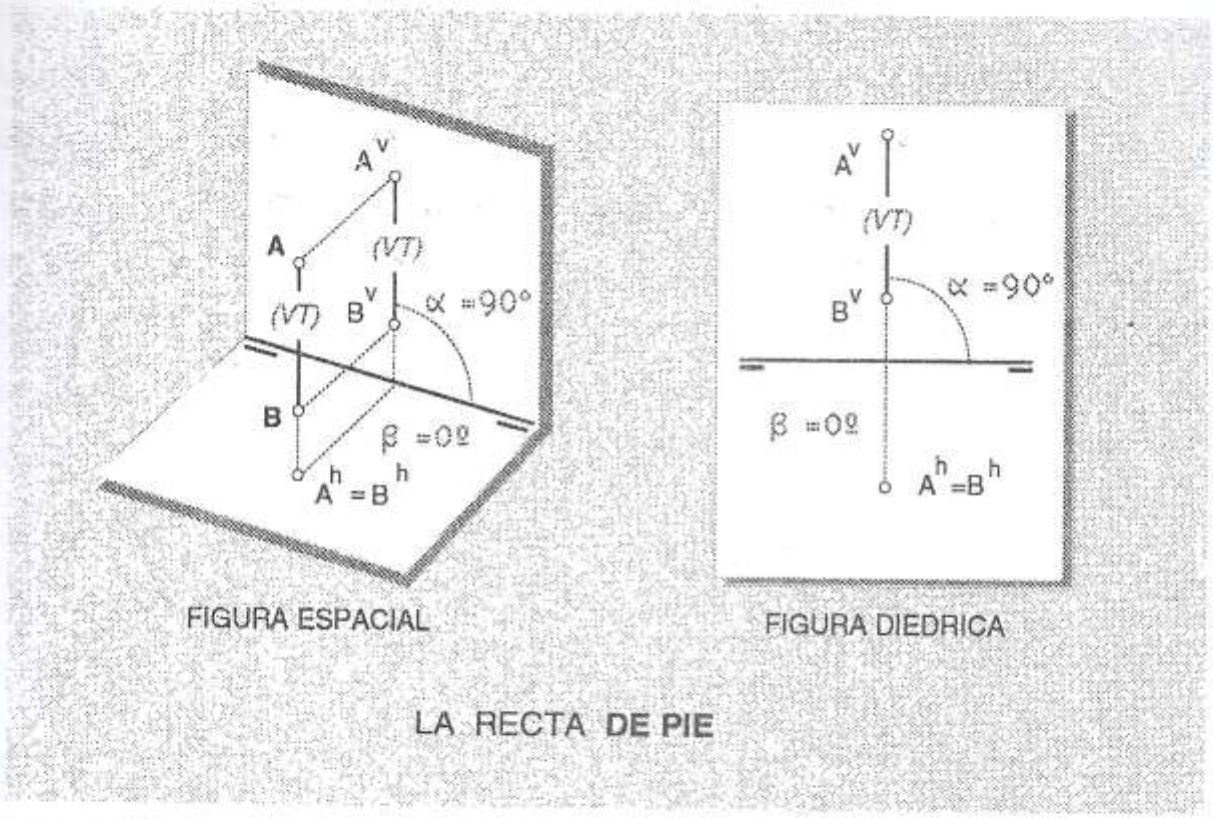
De la misma forma que en el caso de la Recta Horizontal, el nombre de RECTA FRONTAL se lo reserva aquella que no forma ángulos notables con el PH, es decir, la que es oblícua con respecto a él.

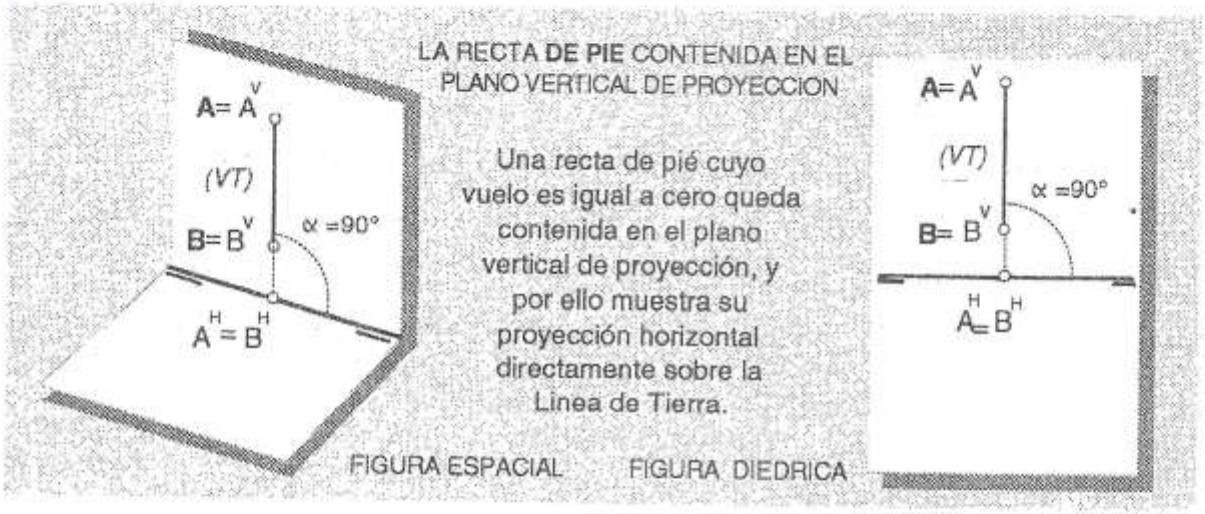


LA RECTA **FRONTAL**

RECTA DE PIE

Una recta De Pie se distingue por ser perpendicular al Plano Horizontal de Proyección, es decir, que forma con él un ángulo $\alpha=90°$. Consecuentemente, ella es paralela al plano vertical, de modo que todos sus puntos mantienen un vuelo semejante, vale decir que $\beta=0°$. Su proyección horizontal recoge en un solo punto, las de todos los puntos de la recta, y su proyección vertical es perpendicular a LT y revela el VT del segmento real que la define. Debido a su relación de paralelismo con el PV, satisface todas las propiedades de una Recta Frontal. Su proyección vertical es perpendicular a LT y revela el VT del segmento real que la define. Debido a su relación de paralelismo con el PV, satisface todas las propiedades de una Recta Frontal.

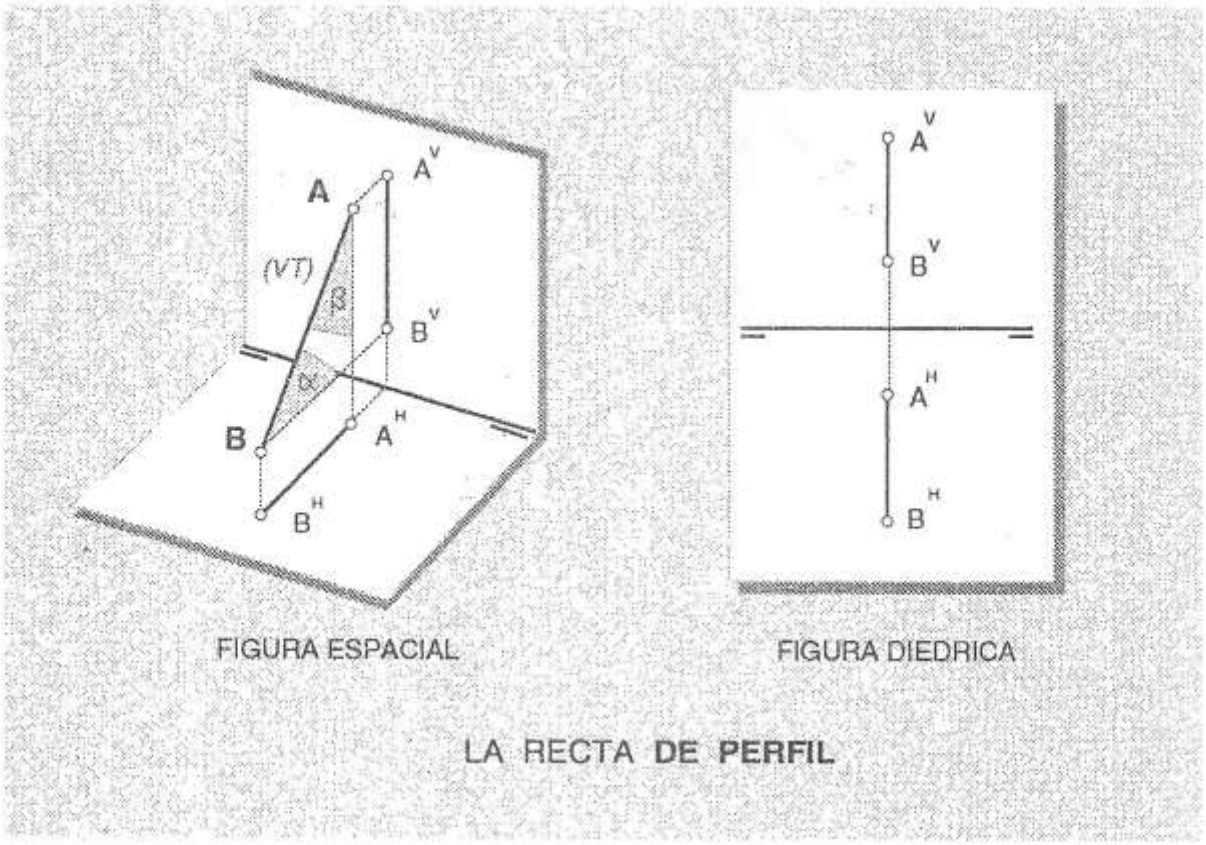




RECTA DE PERFIL

La recta DE PERFIL se reconoce en el espacio por ser ortogonal a la Línea de Tierra. En general, los valores de "α" y "β" están comprendidos entre 0° y 90°, mas siempre habrán de ser complementarios, es decir, deben sumar 90°. Esta recta

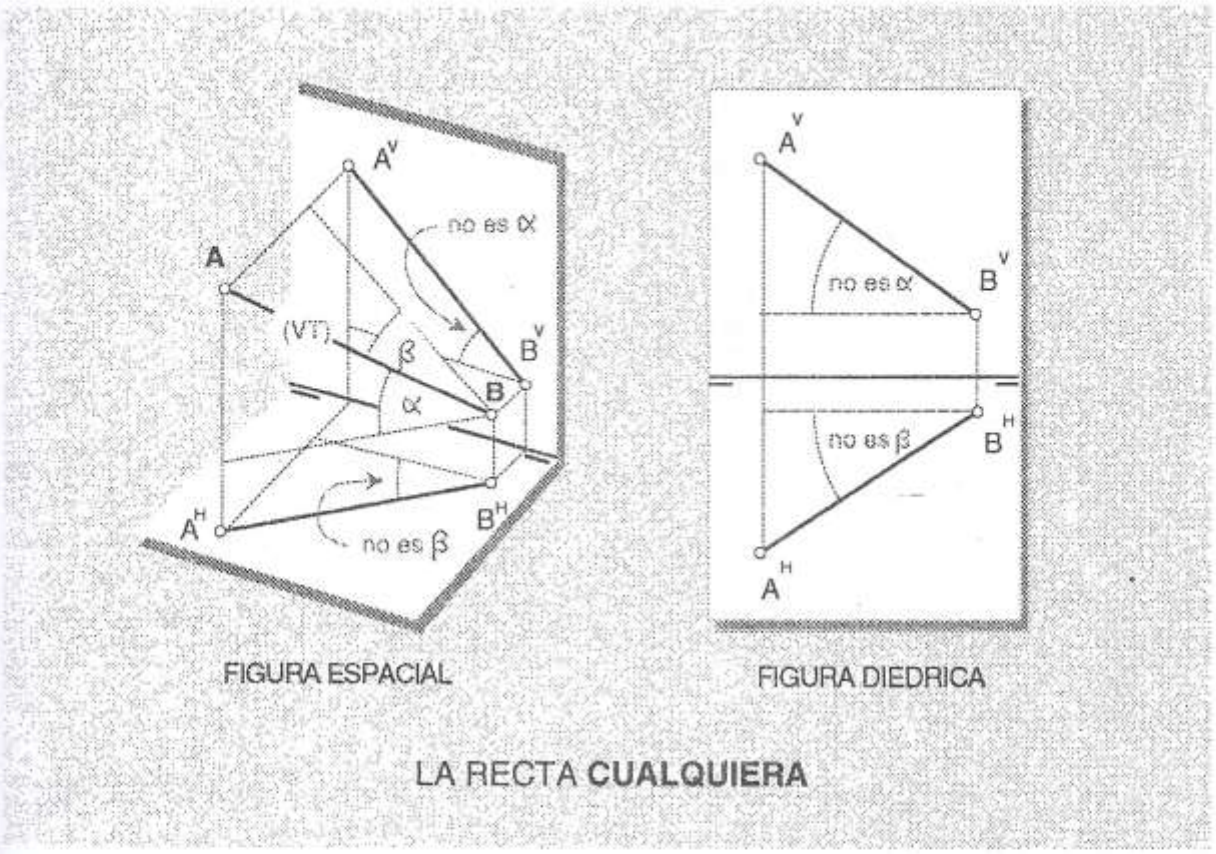
reserva su nombre de RECTA DE PERFIL siempre que ocupa una posición oblícua con respecto a los planos de proyección, es decir, cuando los valores de "α" y "β" no son 0° ni 90°. En esta situación, a diferencia de los casos anteriores, su VT no es evidenciado en ninguna de sus dos proyecciones, así como tampoco lo son las magnitudes de "α" y "β". (Note que ambas proyecciones son perpendiculares a LT).



Sin embargo, debe notarse que, en aquellos casos en que ella es perpendicular a alguno de los planos de proyección, adquiere características que la particularizan (Recta DE PIE y Recta DE PUNTA).

RECTA CUALQUIERA

Una recta CUALQUIERA, es oblícua con respecto a ambos planos de proyección sin ser ortogonal a L.T., como lo es la Recta de Perfil, es decir, forma ángulos cualesquiera (q) con ellos. De la misma forma que dicha recta, la recta CUALQUIERA no es paralela a ninguno de los planos de proyección, y a diferencia de los 5 primeros casos descritos, su VT no es evidenciado en ninguna de sus dos proyecciones, así como tampoco lo son las magnitudes de "α" y "β", propiedad que comparte con la recta de Perfil.



Para reconocer estas magnitudes, es decir, el VT y los ángulos "α" y "β", habremos de recurrir a procedimientos que explicaremos mas adelante.

6. LA RECTA

De la cuidadosa observación de los casos descritos, derivamos, entre otras, las siguientes conclusiones:

1- Siempre que un segmento de recta es paralelo a un plano, revela en su proyección sobre dicho plano el Verdadero Tamaño que él tiene en el espacio.

2- Siempre que un segmento de recta es paralelo a un plano, el ángulo que forma su proyección sobre el mismo con la LT, es igual al que él forma en el espacio con el otro plano de proyección.

3- Cuando una recta es perpendicular a un plano, su proyección sobre el mismo se vé como un punto, y su proyección sobre el otro es perpendicular a la LT, revelando, en consecuencia, su Verdadero Tamaño y la magnitud real del ángulo que forma con el otro plano.

4.- Siempre que una recta es perpendicular a un plano, solo puede ser paralela al otro.

5.- Siempre que una recta es oblicua con respecto a un plano, solo puede ser oblícua o paralela al otro.

6- Siempre que una recta es paralela a un plano, puede ser oblícua, paralela o perpendicular al otro.

7.- Siempre que una recta pertenece a un plano de proyección, se confunde con su proyección respectiva sobre el mismo plano.

8.- Siempre que una recta pertenece a un plano de proyección, su proyección sobre el otro se confunde con la Linea de Tierra.

9.- De todos los casos descritos, solo los cinco primeros, en los cuales la recta es paralela a uno o ambos planos de proyección, dan lugar a posiciones adicionales cuando los segmentos llegan a confundirse con dichos planos. Por otra parte, mientras esas proyecciones revelan directamente las magnitudes gráficas de los ángulos "α" y "β" y los verdaderos tamaños de los segmentos que las producen, las rectas DE PERFIL y CUALQUIERA no hacen evidente ninguna de estas cualidades a través de sus proyecciones. Es precisamente en la determinación de tales magnitudes, donde entrará en juego la aplicación de los procedimientos a los cuales hicimos mención en el capítulo anterior.

El cuadro siguiente es una síntesis de las características enunciadas en cada uno de los casos vistos. Visto en dirección horizontal, muestra las características de cada una de las rectas, es decir, las magnitudes de los ángulos "α" y "β", la suma de ambos, y las proyecciones (ph o pv) en las cuales el VT es reproducido.

POSICION	**α**	**β**	**α+β**	**VT**
PARALELA A LT	*0°*	*0°*	**0°**	ph/pv
HORIZONTAL	***0°***	q	q	ph
DE PUNTA	*0°*	**90°**	*90°*	ph
FRONTAL	q	***0°***	q	pv
DE PIE	**90°**	0°	*90°*	pv
DE PERFIL	q	q	***90°***	—
CUALQUIERA	q	q	**0° < α+β < 90°**	–

En dirección vertical, podemos identificar en "**negritas**", la característica que define a la recta correspondiente en el espacio; y en "*itálicas* ", aquellas características a traves de las cuales varias rectas se relacionan entre sí. Observe por ejemplo, que

todas las rectas cuyo ángulo "α" es igual a cero, se comportan como lo hace la recta que representa al caso general, en este caso la HORIZONTAL. De modo semejante ocurre al observar el valor $\beta = 0º$, el cual relaciona a la FRONTAL con la DE PIE y la PARALELA A LT. Así mismo, aquellas rectas donde los valores de "α" y "β" son complementarios, comparten la conducta de una recta DE PERFIL.

Podemos entonces figurar que hay, digámoslo así, " familias de rectas ", las cuales comparten características comunes, como por ejemplo, la DE PUNTA, que podría verse como HORIZONTAL o DE PERFIL; o la DE PIE que comparte cualidades propias de la FRONTAL, y la DE PERFIL. Observe, por otra parte, que en la recta CUALQUIERA, la suma de "α" y "β" no contempla igualdad ni con 0º ni con 90º, puesto que de ser así, la recta dejaría de ser CUALQUIERA.

Sin embargo, es importante señalar que la posibilidad de que un segmento ocupe una posición en el espacio, la cual pueda ser referida en Doble Proyección Ortogonal, está sujeta a la relación $90º >= \alpha + \beta >= 0º$, la cual, gracias a la incorporación del signo "=" incluye todo el rango de posiciones que hemos estudiado. De hecho, al observar en el cuadro la columna que expresa la suma $\alpha + \beta$, descubrimos que ningún valor excede los límites de dicha relación.

DETERMINACION DEL VERDADERO TAMAÑO DE UN SEGMENTO Y DE LOS ANGULOS QUE FORMA CON LOS PLANOS DE PROYECCION.

Ya señalamos que la determinación de las magnitudes de los ángulos que una recta forma con los planos de proyección, no representa problema alguno en aquellos cinco primeros casos que reseñamos, puesto que ellos son revelados indistintamente por las proyecciones correspondientes.

Sin embargo, constatamos que no ocurre lo mismo con las rectas DE PERFIL y CUALQUIERA. De modo que, en esos casos, la determinación gráfica de dichas magnitudes se sujeta a la aplicación de tres posibles recursos, a saber: 1-el Cambio de Planos, 2- el Giro, y 3- los Triángulos de Rebatimiento, todos los cuales conducen además, al reconocimiento del Verdadero Tamaño del segmento considerado. Cada uno de ellos será descrito a continuación.

CAMBIO DE PLANOS

El Cambio de Planos, como instrumento para determinar las magnitudes de los ángulos "α" y "β", y el Verdadero Tamaño de un segmento, se apoya en su habilidad para expresar nuestros cambios de posición como observadores con respecto a los objetos y correlacionar, en una cadena de imágenes, las distintas vistas que percibimos de ellos.

La aplicación de este recurso a los fines señalados consiste fundamentalmente en ubicar uno cualquiera de los planos de proyección, por ejemplo el Vertical {**1**}, en una nueva posición {**3**} paralela al segmento considerado (AB), de modo que la nueva Línea de Tierra (3/2), se coloque en posición paralela a la proyección horizontal (A^hB^h) del segmento, para que la nueva proyección obtenida (A^3B^3) nos revele su Verdadero Tamaño y el ángulo "α". Es así como nosotros mismos induciríamos su movimiento al desplazarnos alrededor de la recta para apreciar las magnitudes reales que intentamos descubrir. (No olvidemos que en el ámbito del Cambio de Planos cualquier cambio en la posición del plano de proyección sobre el cual representamos la imagen de un objeto, es el resultado del cambio de la posición de observación desde la cual lo percibimos).

La figura espacial siguiente, nos ilustra lo que queremos explicar, si estuviésemos en la situación de indagar tales valores "caminando" alrededor de una recta

El Sistema Principal "LT **1/2**", recibe las proyecciones del segmento **AB**, que está en posición CUALQUIERA con respecto a él. Así, cuando observamos desde la posición **1**, percibimos de dicho segmento lo que representamos en el plano vertical principal {1}, donde no apreciamos el tamaño verdadero de AB ni el de su ángulo "α" con el Plano Horizontal. Al desplazarnos a la posición **3**, desde donde nuestra

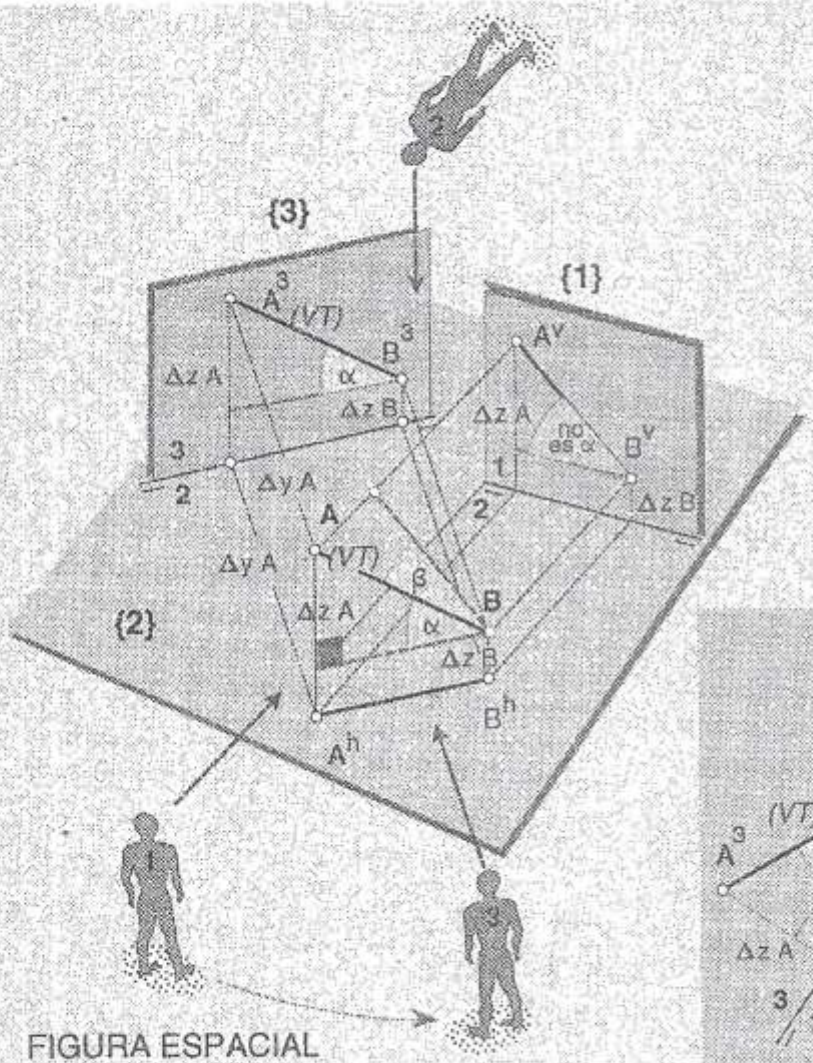
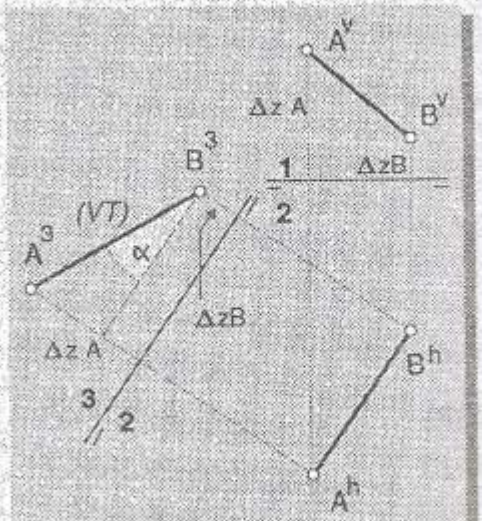


FIGURA ESPACIAL

visual se hace perpendicular al segmento, el plano vertical se coloca en la posición auxiliar {3}, de modo que la nueva Linea de Tierra **3/2** se hace paralela a la proyección horizontal AhBh del segmento, momento en el cual el plano {3} es paralelo al segmento **AB** en el espacio. Así, con respecto al nuevo sistema secundario "LT **3/2**", el segmento ocupa una posición FRONTAL, la cual nos revela su Verdadero Tamaño y la magnitud real del ángulo "α" en la nueva proyección auxiliar {3}.



La Linea de Tierra "LT 3/2" solo está obligada a ser paralela a "AhBh", sin importar la distancia a la cual esté de ella. Sin embargo, los valores respectivos de las cotas (Δz) deben ser correspondientemente iguales.

FIGURA DIEDRICA

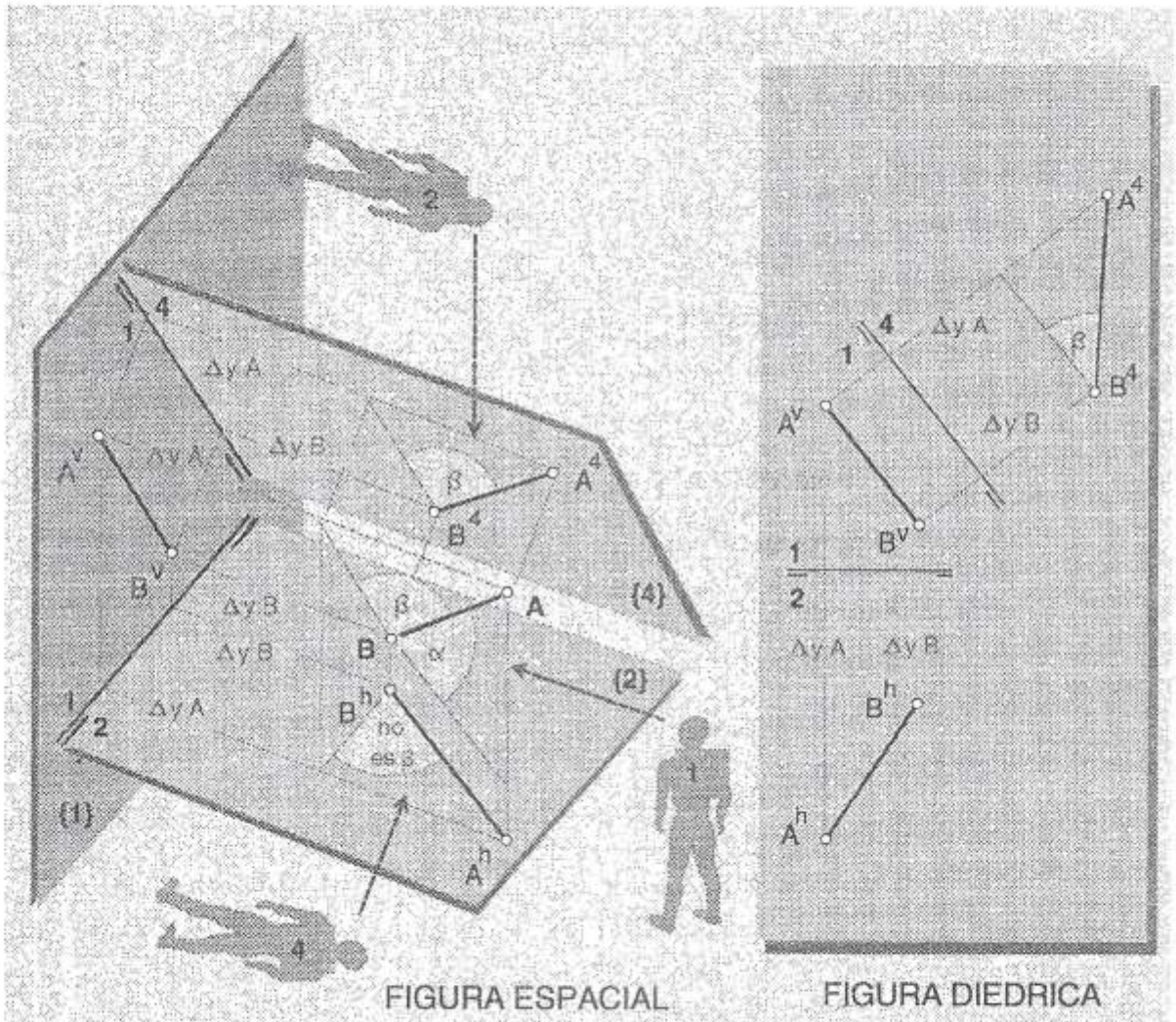
Mientras tanto, el plano Horizontal de proyección "2" ha permanecido en la misma posición, para permitir que los protagonistas puedan moverse como hemos explicado, sin que se alteren las relaciones de ortogonalidad necesarias para que se mantenga el comportamiento requerido por el sistema.

CUALQUIERA. Mientras eso ocurre, en la figura diédrica verificamos que la nueva proyección (A^3B^3) conserva, con respecto a LT 3/2, la misma cota que en la proyección principal mantiene "A^hB^h" con respecto a LT 1/2, propiedad que aplicamos para localizar la proyección buscada, en virtud de que al desplazarnos desde "**1**" hasta "**3**", el plano {**2**} no modifica su posición y consecuentemente las cotas se mantienen inalteradas, registrándose así sus respectivas magnitudes en el nuevo plano {**3**}.

No obstante, en ellas observamos que los movimientos que hemos realizado solo nos han llevado a conocer el Verdadero Tamaño del segmento AB y la magnitud gráfica del ángulo "α" , mientras el ángulo "β" que el segmento forma con el plano vertical de proyección sigue siendo desconocido para nosotros, pues aún no se ha presentado en su magnitud verdadera sobre alguno de los planos de proyección.

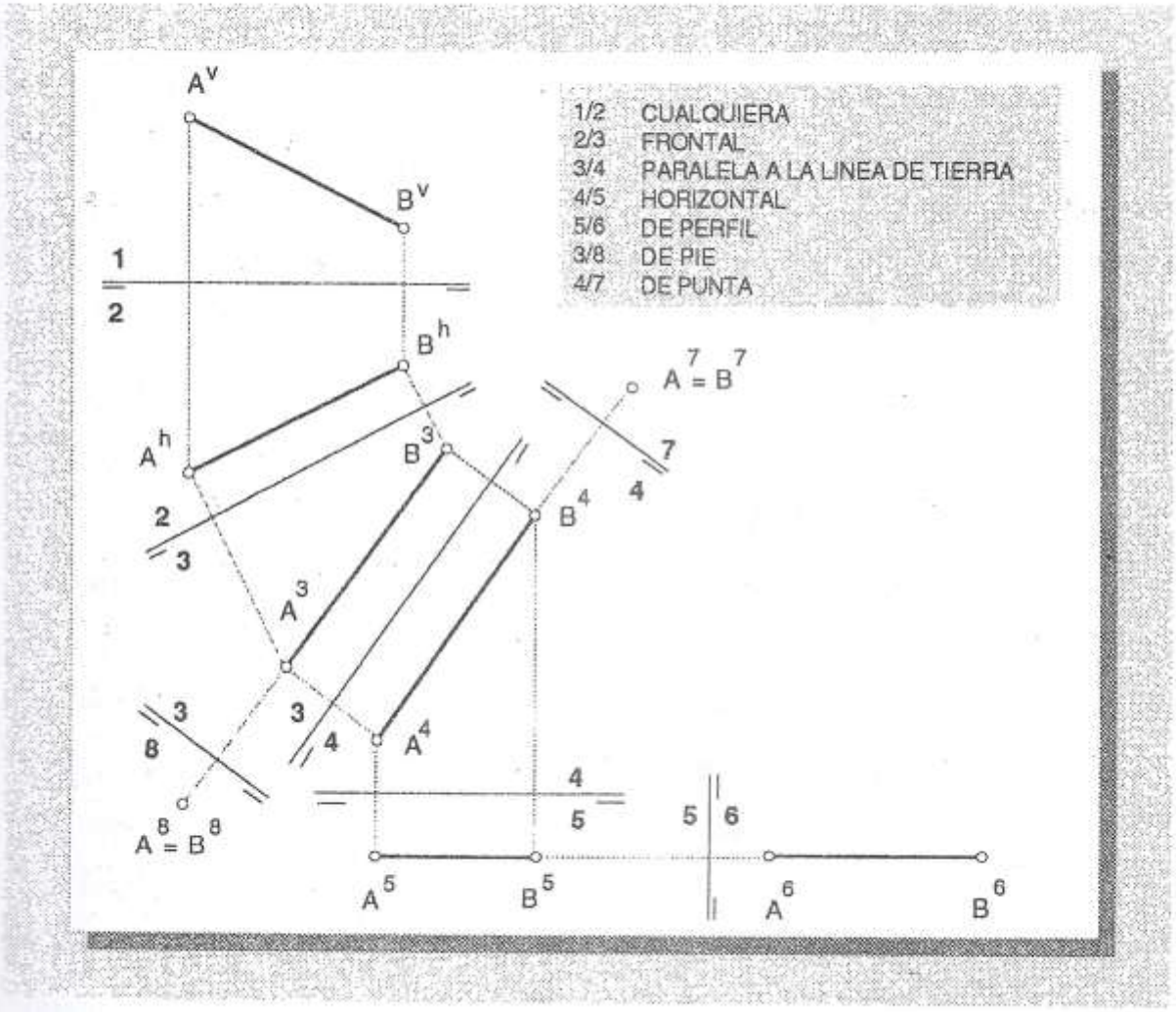
Para conocer la magnitud del ángulo "β", tan solo es necesario mantenerse estable en la posición de observación "**1**", como nos lo muestra la figura siguiente, y permitirnos el movimiento desde la posición " **2** " hasta la posición "**4** ", para ubicarnos de modo que nuestra nueva visual se haga perpendicular al segmento "AB" en el espacio, al tiempo que el plano horizontal de proyección se instala paralelo a AB en la posición { **4** }, en la cual la nueva Línea de Tierra "LT 4/1" es paralela a la proyección vertical "A^vB^v" del segmento AB [1]. Naturalmente, en esta posición, la recta se comporta como una HORIZONTAL, permitiendo reconocer la magnitud verdadera del ángulo "β" que queda expresada en la proyección obtenida sobre el plano { **4** } en la abertura comprendida entre la proyección "A^4B^4" del segmento y la Línea de Tierra "LT 4/1".

[1] Las Líneas de Tierra "LT 1/4" y "LT 2/3", que siempre corresponden a los Sistemas Auxiliares o Secundarios que comparten las proyecciones principales, tienen una sola restricción consistente en hacerse paralelas o perpendiculares a la respectiva proyección. Así, la distancia a la cual se ubiquen de ellas, puede ser cualquiera y dependerá siempre de la disponibilidad de espacio libre que nos ofrezca la superficie en la cual dibujamos.



El desplazamiento en el espacio del plano horizontal desde {2} hasta{4}, donde se hace paralelo al segmento AB, queda expresado en DPO por la posición de "LT 4/1", paralela a AvBv.

El razonamiento que hemos aplicado en los ejemplos descritos puede extenderse al mover sucesivamente un mismo plano o alternando el movimiento de ambos, para generar las siete posiciones particulares de una recta, concatenadas a través de una secuencia que las correlaciona, como lo ilustra el gráfico siguiente.



Mediante esta dinámica, que puede extenderse *ad infinitum*, podemos determinar la imagen que percibimos de la recta, o de cualquier otro objeto, al ubicarnos en un punto cualquiera del espacio. Observe cada sistema aisladamente y note que el comportamiento del segmento AB en cada uno de ellos, coincide con los casos que venimos de estudiar, tal como lo muestra la tabla anexa al gráfico.

Así pues, sobre la base de esta habilidad, potestativa del Cambio de Planos, la cual nos permite fácilmente pasar de una posición a otra, es factible transformar una recta DE PERFIL o una recta CUALQUIERA, en otra cuyas proyecciones nos revelen las magnitudes que aquellas ocultan . Es así que en la secuencia gráfica podemos

comprobar cómo la recta CUALQUIERA, en virtud del cambio de posición de los planos de proyección (no olvide nunca que los cambios de posición de los planos de proyección son la expresión —en doble proyección ortogonal— de los cambios de posición del observador con respecto al objeto) se "transforma" en una HORIZONTAL (LT 1/4) y en una FRONTAL (LT 2/3), para mostrarnos las magnitudes que ella oculta. De igual forma, la recta DE PERFIL se transforma en FRONTAL (LT 2/3), para conducirnos al mismo fín.

GIRO DE LA RECTA

Así como el Cambio de Planos reproduce la relación dinámica que, como observadores, establecemos con un objeto, cuando nos desplazamos alrededor de él, permitiendo representar en una secuencia de proyecciones las sucesivas imágenes que percibimos, el Giro permite también reproducir esta relación dinámica, pero no ya por efecto de nuestro desplazamiento alrededor de él, sino mediante la rotación del objeto frente a nosotros, quienes permanecemos observándolo desde una misma posición. De modo pues, que ubicados en los puntos de vista "1" y "2", que se mantienen fijos, miramos perpendicularmente hacia los planos de proyección, mientras el objeto (en este caso, un segmento de recta) rota sobre sí mismo alrededor de un eje también fijo (con el cual se corta), el cual es perpendicular a uno cualquiera de dichos planos de proyección. Es obvio pues, que este eje fijo será invariablemente asumido por una RECTA DE PIE o por una RECTA DE PUNTA.

De este modo, un segmento de recta como una CUALQUIERA (AB), puede ser fijado en un punto cualquiera de él (A), digamos a una recta DE PIE (i), de modo que ambas rectas son secantes en el punto A . Si imaginamos que, en esas

condiciones, el segmento "AB" gira alrededor de la recta "p" describiendo una revolución completa de 360°, él volverá a su lugar de partida después de haber

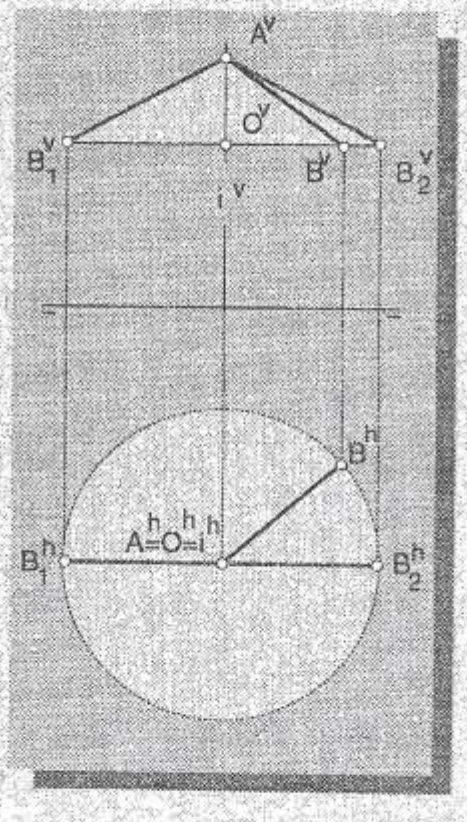


FIGURA DIEDRICA

Cuando el segmento AB, el cual está en posición CUALQUIERA, se mueve hasta ocupar las posiciones AB1 y AB2 , se transforma en FRONTAL y, en la proyección vertical, revela su Verdadero Tamaño y la magnitud real del ángulo "α". Fíjese muy bien, además, que dicho ángulo, que se vé en proyección no es aquel que forma la posición cualquiera AB en B, sino el que forma el segmento en las posiciones

FRONTALES AvBv1 en Bv1 , y AvBv2 en Bv2. Note tambien que es absolutamente imposible que el ángulo "β" sea visto en su verdadera magnitud en la proyección vertical, como tampoco lo es en proyección horizontal.

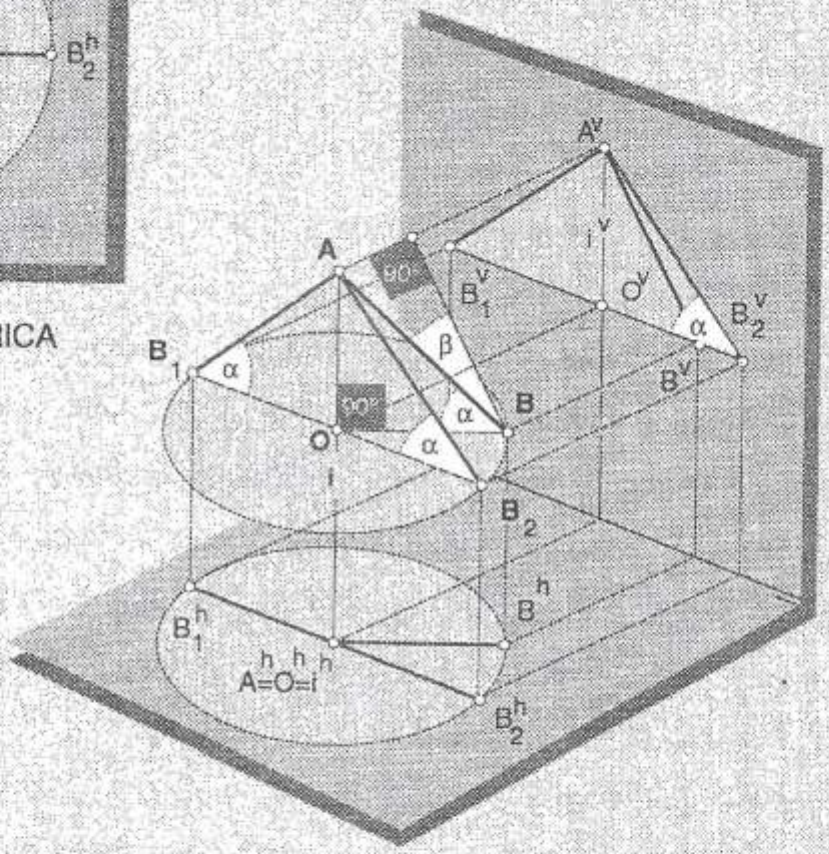


FIGURA ESPACIAL

descrito en su trayectoria, una superficie cónica. Note que durante esta trayectoria, ninguno de los puntos del segmento "AB" cambia sus cotas, aunque si sus vuelos.

Observemos, además, lo que ha hecho el punto "B" en esta situación. La circunferencia descrita por él en el espacio, por ser paralela al PH, aparece expresada en su forma verdadera por la trayectoria de la proyección horizontal (B^h) de dicho punto, mientras que la trayectoria de su proyección vertical (B^v) está representada por una línea paralela a la Linea de Tierra.

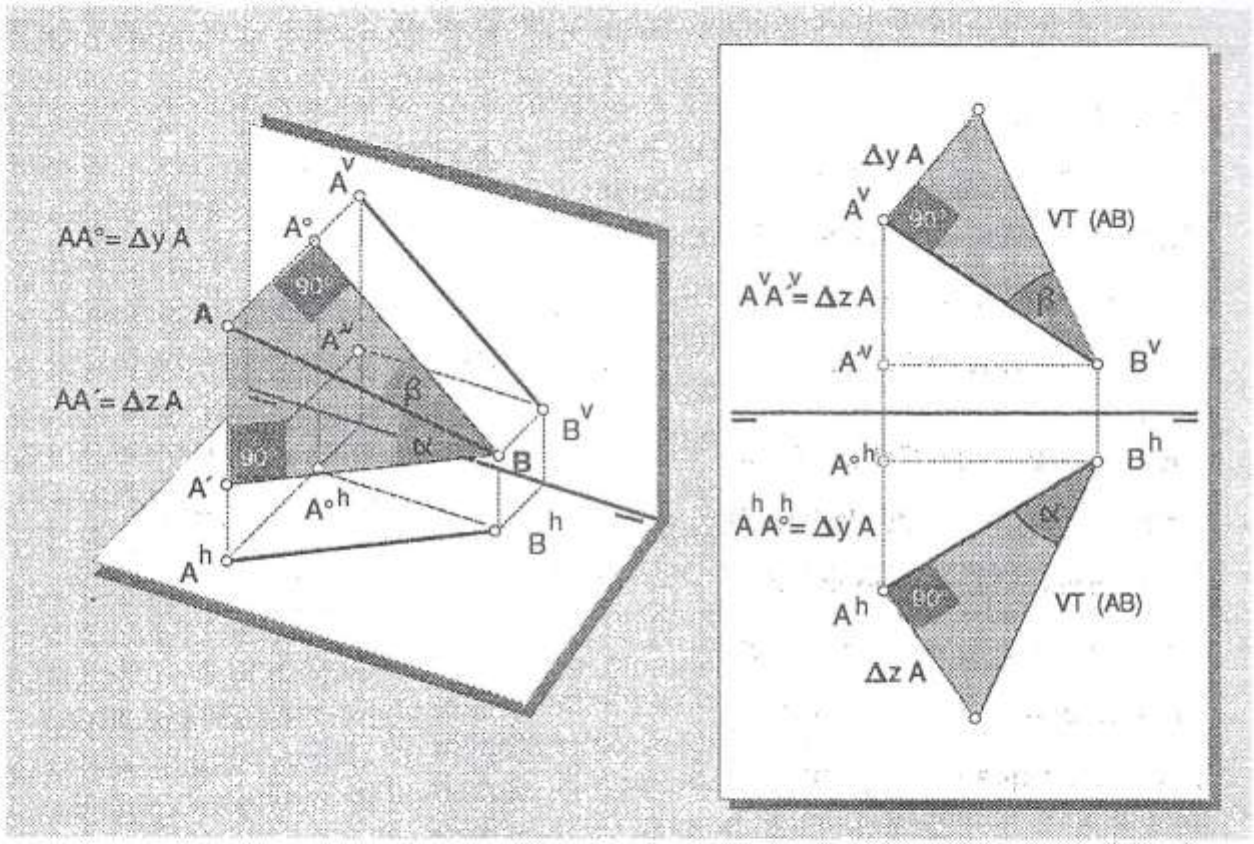
Ahora bien, durante esa trayectoria en el espacio, el segmento "AB" ha ocupado diversas posiciones notables. De hecho cuando "B" alcanza, en su revolución alrededor de "A", las posiciónes B_1 y B_2, adquiere el mismo vuelo que dicho punto, de mánera que el segmento, en ámbos casos se tranforma en FRONTAL (AB_1 y AB_2), revelándonos su Verdadero Tamaño y la magnitud real del ángulo " α " que él forma con el PH.

Pero, ¿que pasa con la magnitud del ángulo "β"; donde está? Sería un error pensar que dicho ángulo está representado por el ángulo complementario a "α", dentro del triángulo encontrado en proyección vertical, y del cual el VT es hipotenusa, puesto que ello solo sería posible si la recta fuese DE PERFIL, y en este caso ella es una CUALQUIERA. De manera análoga, para su determinación deberíamos ocurrir a una recta DE PUNTA como eje de giro, para transformar al segmento "AB" en HORIZONTAL y poder percibir así la magnitud real del ángulo "β", la cual quedará expresada por el ángulo formado entre la nueva proyección horizontal de dicha HORIZONTAL y la Linea de Tierra. Por supuesto que, en este caso, el punto que gira alrededor de la recta DE PUNTA, describiría una circunferencia paralela al Plano Vertical de Proyección, la cual sería visible en su verdadera forma en la proyección vertical, y como una línea paralela a LT en la proyección horizontal.

TRIANGULOS DE REBATIMIENTO

Los Triángulos de Rebatimiento (TR) permiten establecer las correlaciones existentes entre un segmento de recta, sus respectivas proyecciones, las distancias de los puntos que lo definen a los planos de proyección y los respectivos ángulos que forma con dichos planos. De esta forma, la relación que el segmento establece con cada una de sus proyecciones da lugar a sendos Triángulos de Rebatimiento, uno para la proyección horizontal y otro para la vertical.

Cada Triángulo de Rebatimiento es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está representada por el Verdadero Tamaño del segmento, mientras los catetos de cada uno representan respectivamente la diferencia de cota (Δz) y la proyección horizontal (p.h.), y el vuelo (Δy) y la proyección vertical (p.v.). En la figura espacial de la página siguiente podemos verificar estas relaciones, donde además nos percatamos que los ángulos "α" y "β" están comprendidos entre la representación del VT y la proyección correspondiente, y obviamente son respectivamente opuestos a las diferencias de cota y vuelo (Δz y Δy). Observe que, en el espacio, la relación de perpendicularidad que establecen entre sí dichas diferencias con las proyecciones correspondientes ($\Delta z \perp$ p.h y $\Delta y \perp$ p.v.) pueden replicarse en la representación diédrica, pués ella nos ofrece conocimiento sobre las magnitudes reales de las proyecciones (que no el VT del segmento) y de las diferencias Δz y Δy. De modo que podemos trazar por cualquiera de los extremos de dichas proyecciones sendas rectas perpendiculares sobre las que transladamos respectivamente las magnitudes ofrecidas por tales diferencias. La hipotenusa de los triángulos rectángulos obtenidos, que en la figura espacial está representada por AB, nos revela directamente su VT y nos permite conocer las respectivas magnitudes gráficas de los ángulos "α" y "β" .



Debemos tener en cuenta que, de la misma forma que ocurre cuando aplicamos los procedimientos anteriores, a una recta DE PERFIL basta con buscarle un solo TR, debido a que sus ángulos siempre son complementarios.

TRAZAS DE LA RECTA

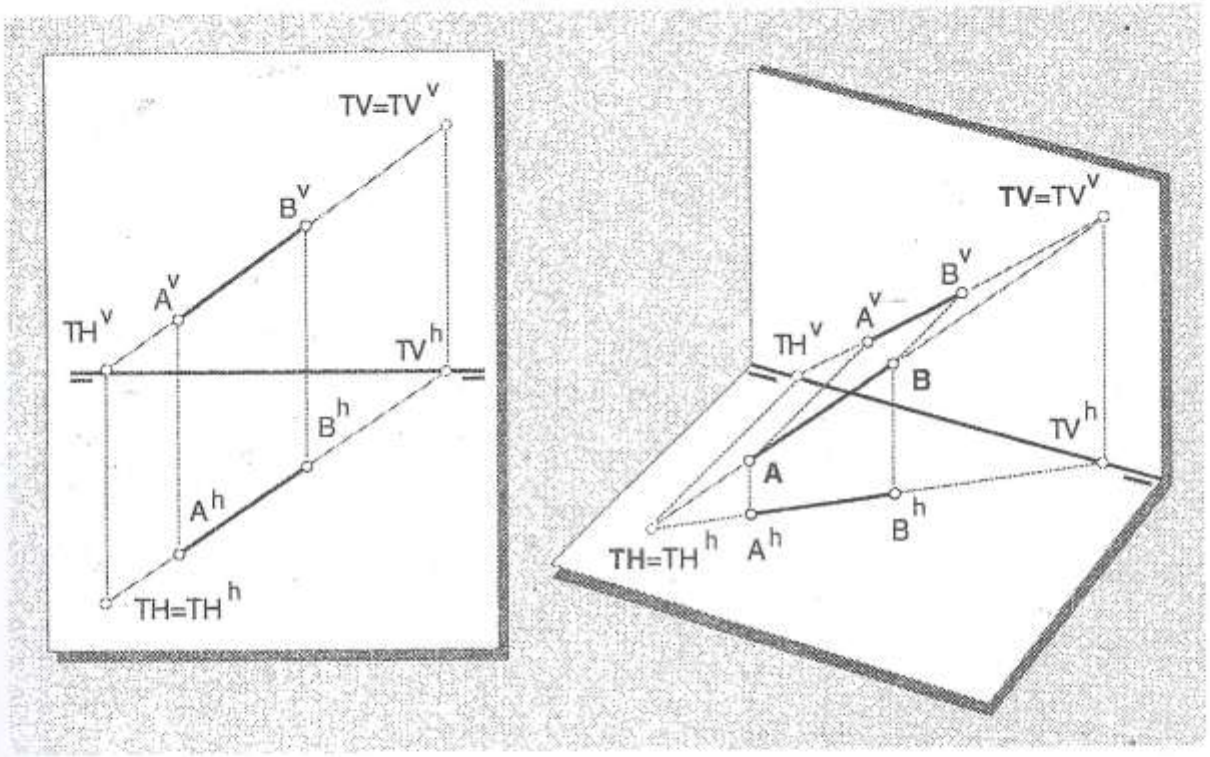
Cuando una recta penetra los Planos de Proyección, comparte con ellos los puntos de traza " TV " y " TH ". La penetración " TV " en el Plano Vertical , es un punto real [2] de vuelo igual a Cero, cuya proyección vertical " TV ^{V} " ocupa el mismo lugar del punto real de intersección, y cuya proyección horizontal " TV ^{h} " descansa sobre la Linea de Tierra.

[2] Cuando decimos que un elemento es real, nos referimos a su representación como ente con presencia física, capaz de reproducir su imagen al proyectarse sobre un plano.

Del mismo modo, la penetración " TH " en el Plano Horizontal , es un punto de cota igual a Cero, el cual comparte su proyección horizontal " TH^h " con la traza horizontal real " TH ", y cuya proyección vertical " TH^v " descansa sobre la Linea de Tierra.

Si usted analiza cuidadosamente los casos vistos de rectas en posición particular, notará que solo las rectas DE PERFIL y CUALQUIERA poseen dos trazas, mientras que la PARALELA A LT no tiene ninguna y las restantes solamente tienen una, por ser paralelas a uno cualquiera de los Planos de Proyección.

Para conseguir las trazas de la recta determinada por un segmento "AB", basta con prolongar sus respectivas proyecciones hasta que estas corten a LT. El punto común entre LT y la proyección horizontal representa a la proyección horizontal "TV^h (AB) " de la traza vertical, mientras que la intersección de la proyección vertical con LT, muestra la proyección vertical "TH^v (AB)" de la traza horizontal.

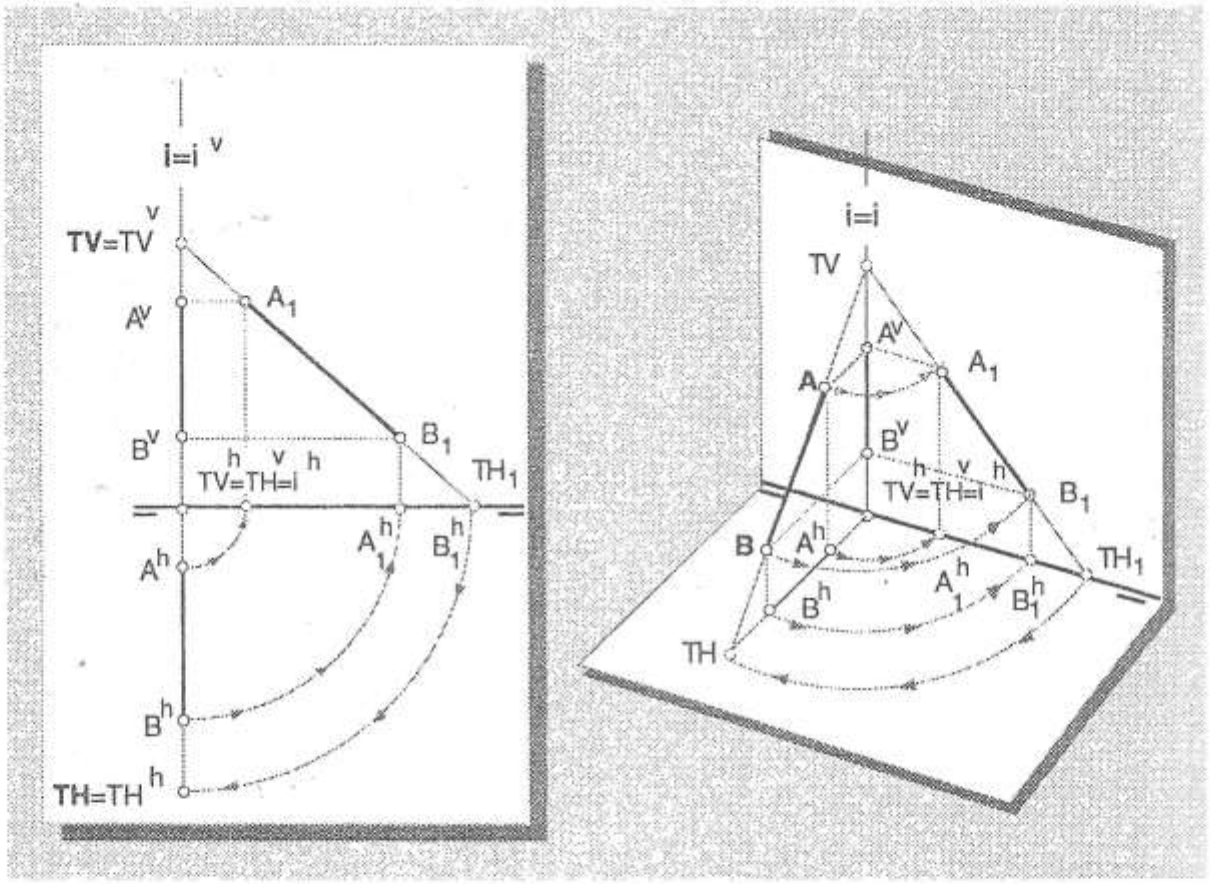


Las trazas reales se encuentran al intersectar las lineas de referencia que pasan por los puntos encontrados sobre LT, con las proyecciones respectivas, de tal forma

que $TH=TH^h$ aparece sobre la proyección horizontal, mientras que $TV=TV^v$ lo hace sobre la proyección vertical.

Este procedimiento general no puede aplicarse cuando la recta es DE PERFIL, caso en el cual es necesario recurrir al Giro o al Cambio de Planos para su determinación, como lo abordaremos de inmediato.

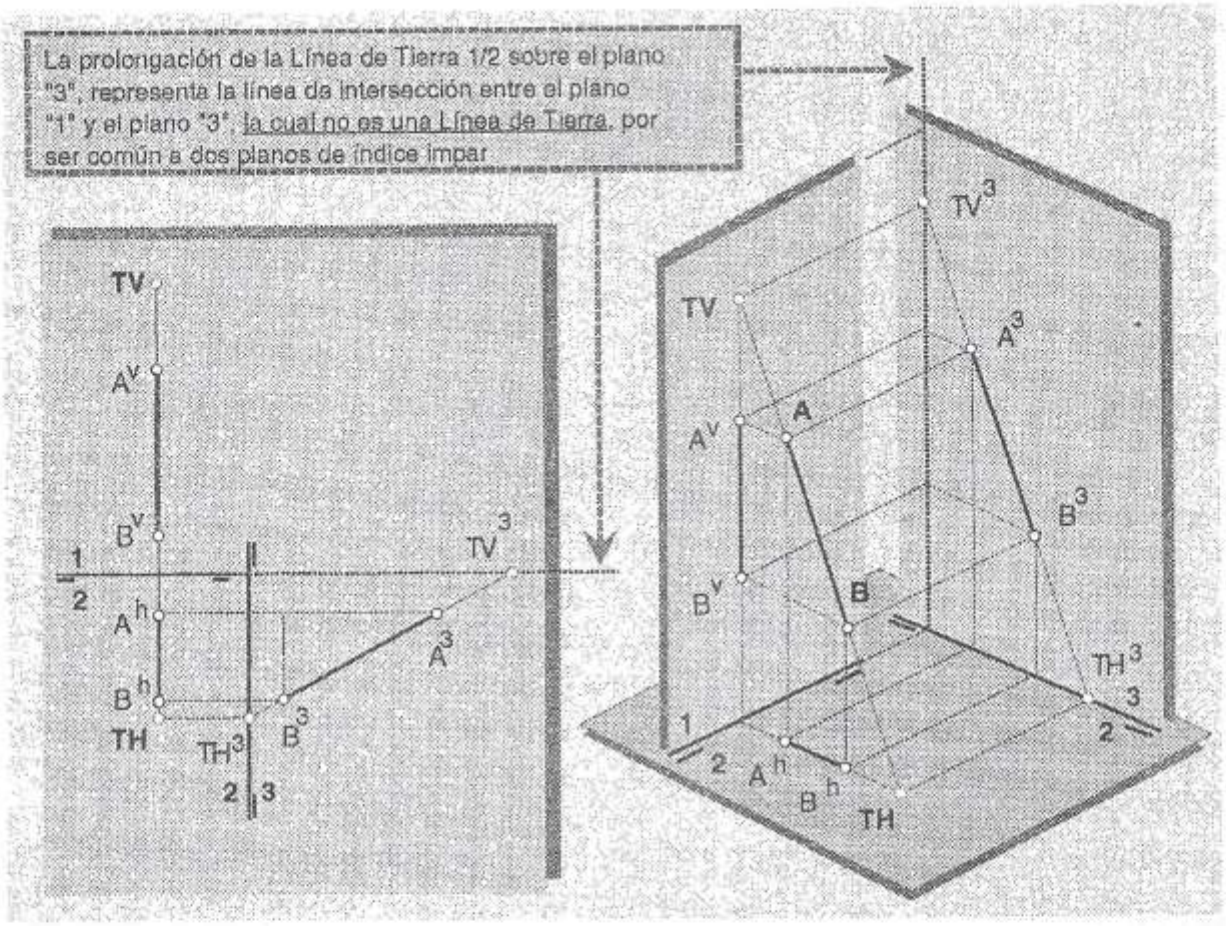
El Giro nos permite obligar al segmento AB, el cual está en el espacio en posición DE PERFIL, a rotar alrededor de una recta DE PIE (i) hasta ocupar la posición A_1B_1 sobre el Plano Vertical de Proyección.



Al extender este segmento A_1B_1 hasta cortar a la prolongación de la proyección vertical A^vB^v del segmento AB, naturalmente estaríamos encontrando la traza

vertical (TV) del segmento, mientras que al cortar a LT, establecemos la posición TH1 sobre A1B1, la cual, devuelta en dirección opuesta a BB1, nos permite determinar la posición real (TH) de la traza horizontal.

El Cambio de Planos, por su parte, hace evidente las posiciones respectivas de las trazas cuando el segmento es llevado a una posición FRONTAL, mediante el desplazamiento del plano vertical a la posición **"3"**, como muestra la figura de la página siguiente.



Naturalmente, podíamos haber dejado fijo el plano vertical en la posición **"1"** y desplazar sobre él al Plano horizontal **"2"** hasta una nueva posición **"4"**, paralela al

segmento AB, caso en el cual lo hubiésemos transformado en HORIZONTAL, y habríamos arribado a la misma solución.

PROYECCIONES DE UN SEGMENTO CONOCIDOS SUS ANGULOS "α" Y "β" CON LOS PLANOS DE PROYECCION.

La determinación de las proyecciones de un segmento que forma ángulos conocidos con los Planos de Proyección, se apoya fundamentalmente en el concepto de LUGAR GEOMETRICO. Un Lugar Geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una misma condición.

Son ejemplos de LUGARES GEOMÉTRICOS, los siguientes:

LA CIRCUNFERENCIA, conjunto de puntos del Plano, equidistantes de uno que se llama Centro.

LA ESFERA, conjunto de puntos del Espacio, equidistantes de uno que se llama Centro.

LA ELIPSE, conjunto de puntos del Plano, cuya suma de distancias a dos puntos llamados Focos, es constante.

LA PARABOLA, conjunto de puntos del Plano, equidistantes de un punto llamado Foco y de una recta llamada Directriz, contenidos en el mismo plano.

LA HIPÉRBOLA, conjunto de puntos del Plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos llamados Focos, es constante.

Bien, para ilustrar más claramente la situación que estamos tratando de comprender, imaginemos que se nos plantea un problema en los términos siguientes: Conocidas las proyecciones del punto "A", determine las proyecciones de un segmento AB que mide 40 mm., y forma con los planos de proyección los ángulos $\alpha=45º$ y $\beta=30º$, sabiendo que "A" es el punto de mayor cota.

Nuestro primer paso, debe consistir necesariamente en verificar si la recta cumple la relación $90º>=\alpha+\beta>=0º$, puesto que si la excede, el problema no tiene solución. Ello, por otra parte, nos permite determinar la naturaleza del segmento; es decir, en cual posición se encuentra, lo cual nos ayudará a decidir de un modo mas preciso como vamos a atacar su resolución, pues eventualmente solo bastará con representar directamente sus proyecciones, como ocurriría en cualquiera de los

casos en que el segmento no es DE PERFIL ni CUALQUIERA. En este caso, estamos —sin duda alguna— frente a un segmento CUALQUIERA.

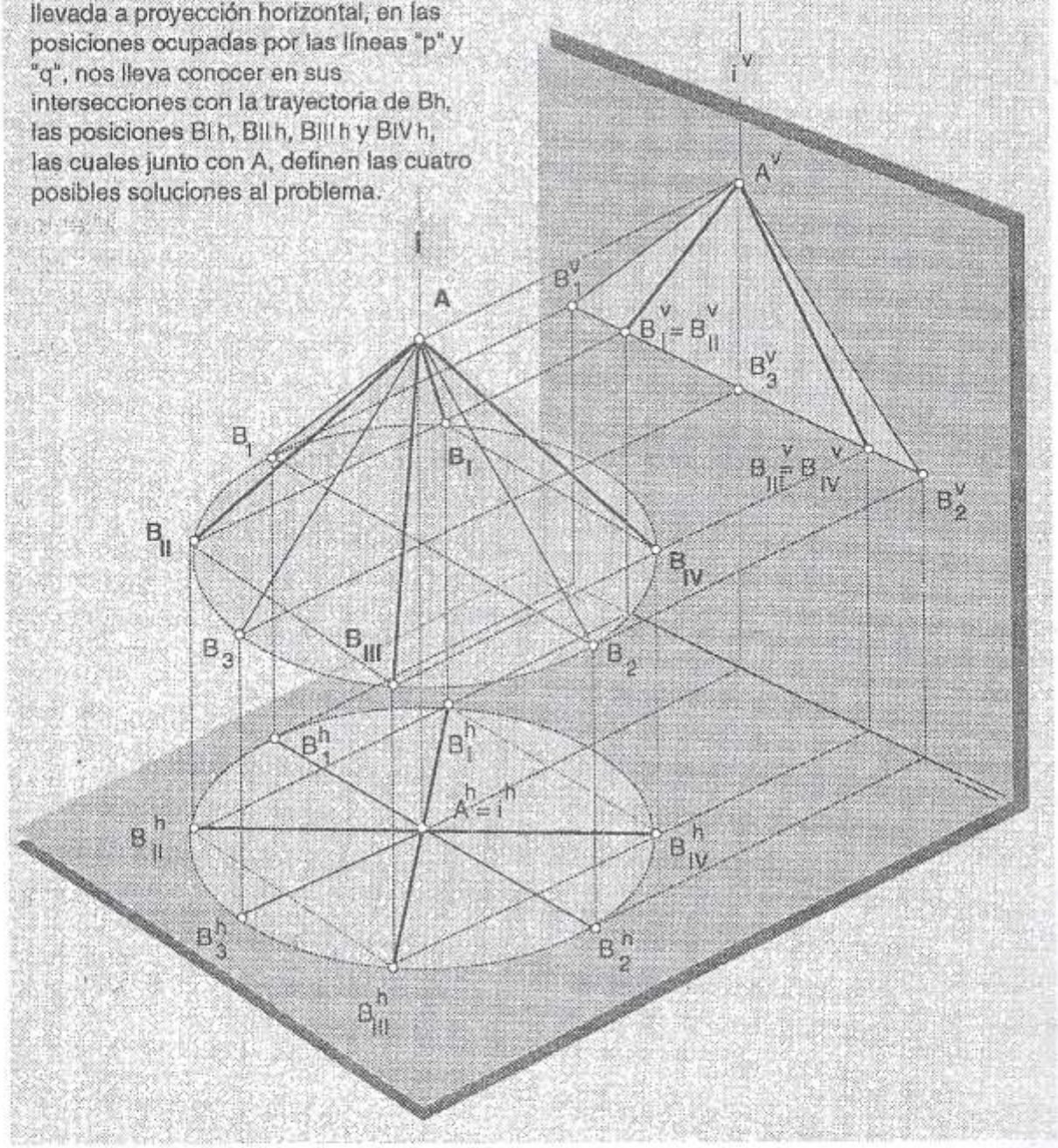
Para resolver este problema, podemos intentar diversas estrategias. La primera de ellas consiste en colocar inicialmente al segmento, indistintamente en posición HORIZONTAL o FRONTAL. Vamos a ilustrar nuestro ejemplo, colocándolo en la posición FRONTAL "AB_1" (ojo: $\Delta yA=\Delta yB_1$) y, de igual manera que hicimos cuando vimos GIROS, vamos a imaginar que el segmento rota 360º alrededor de una recta DE PIE " i ", para regresar a su posición original " AB_1 ".

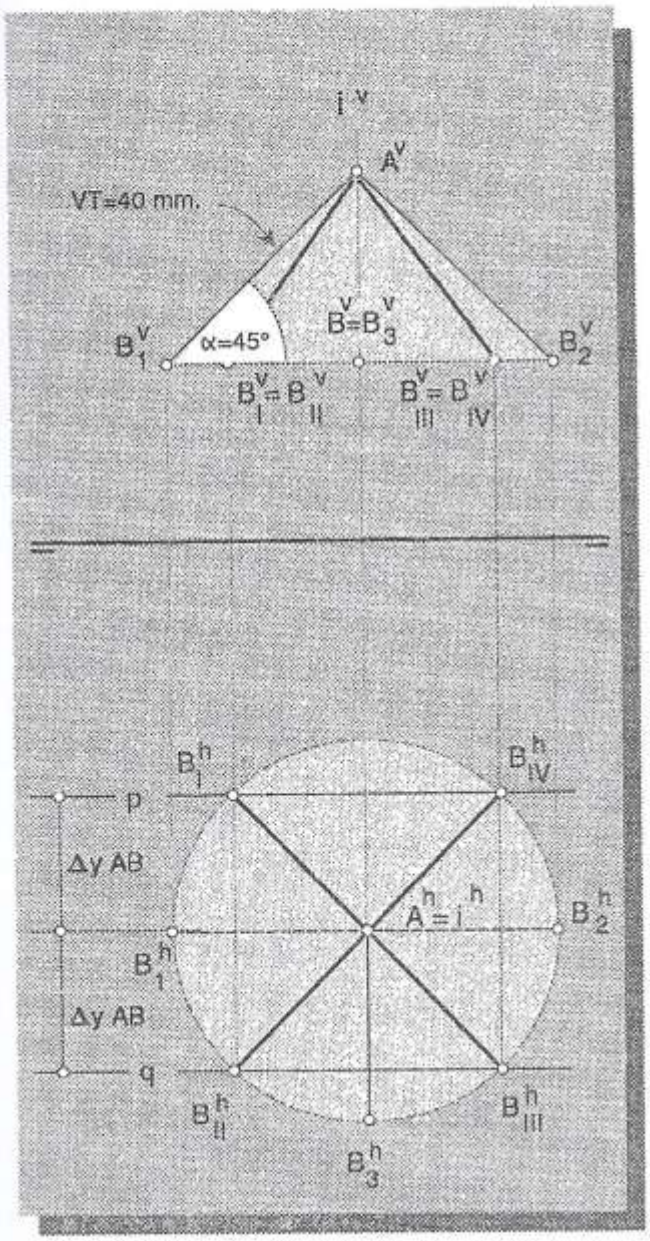
En esa revolución, el punto " B_1 " se desplaza describiendo una circunferencia que se mantiene a una cota constante, de modo que su proyección horizontal " B_1^h " describe exactamente la misma trayectoria, es decir, una circunferencia. Mientras tanto, como el punto B_1 ha mantenido su misma cota en toda su revolución alrededor de " i ", su propia proyección vertical " B_1^v ", se habrá desplazado sin alterar su distancia a LT, de modo que habrá descrito una línea recta paralela a dicha intersección, cuyos extremos están representados por " B_1^v " y " B_2^v ".

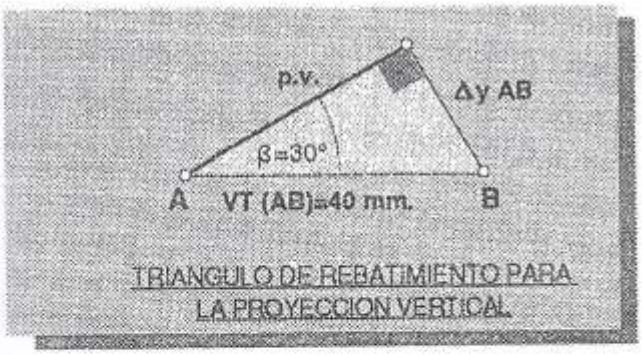
Así como es evidente que en esa trayectoria, la diferencia de vuelo "Δy" entre "A" y "B" crece hasta un valor máximo cuando el punto "B" alcanza la posición "B_3" y el segmento pasa a ser DE PERFIL, el ángulo "β" que dicho segmento forma en ese momento con el PV, crece también hasta un valor máximo (90º - 45º). De este modo, a cada posición sucesiva ocupada por B, (B_1,.....B_3), corresponderá un valor proporcional del ángulo "β".

Ahora bien, de acuerdo a ello, habrá un momento en el cual "β" habrá alcanzado un valor de 30º, para el cual corresponde una sola magnitud de "Δy AB", cuya dimensión se determina sencillamente a partir del TRIÁNGULO DE REBATIMIENTO PARA LA PROYECCIÓN VERTICAL, el cual es fácilmente construído, gracias a los datos del problema que nos dan a conocer el VT de AB y el ángulo "β". Al llevar el segmento "Δy AB" a proyección horizontal, podemos establecer el LUGAR GEOMÉTRICO de todos los puntos del Plano Horizontal, cuya diferencia de vuelo con respecto a la proyección horizontal "A^h", es igual a la encontrada.

El segmento AB, colocado inicialmente en la posición frontal AB_1, al girar 90° alrededor de la recta de pie "i" y colocarse en la posición DE PERFIL AB_3, modifica el angulo β desde 0° hasta 45° para alcanzar la máxima "Δy AB". Dado que ambos valores crecen en forma proporcional, debe existir un momento en el cual, para un valor β=30°, la "Δy AB" corresponde a la que debe existir en la(s) solución(es) del problema. El Triángulo de Rebatimiento para la proyección vertical, nos permite conocer esa "Δy AB" la cual, llevada a proyección horizontal, en las posiciones ocupadas por las líneas "p" y "q", nos lleva conocer en sus intersecciones con la trayectoria de Bh, las posiciones BIh, BIIh, BIIIh y BIVh, las cuales junto con A, definen las cuatro posibles soluciones al problema.







TRIANGULO DE REBATIMIENTO PARA LA PROYECCION VERTICAL

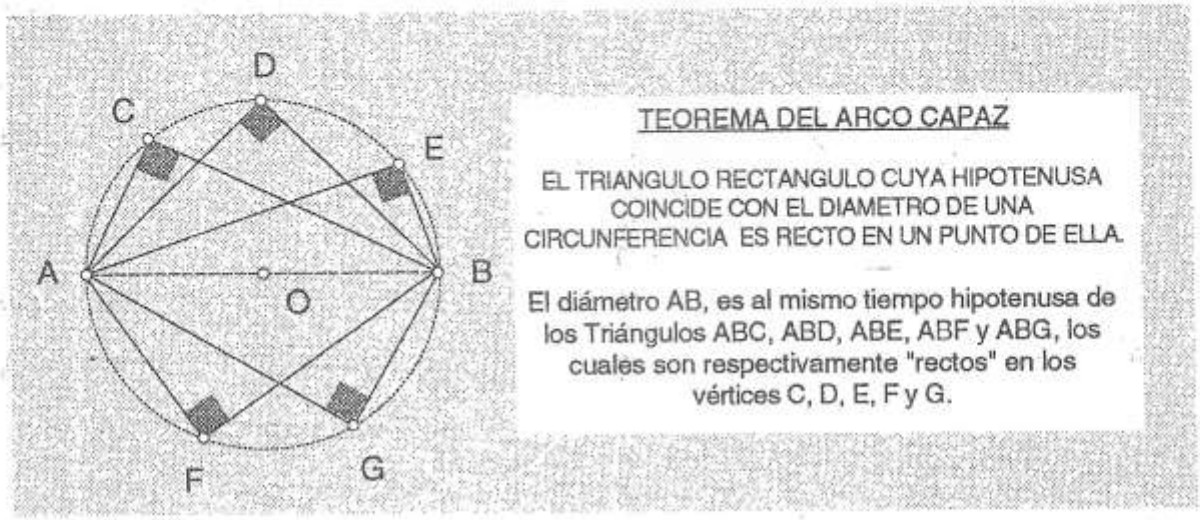
Para ello trazamos en el plano horizontal, dos rectas ("p" y "q") paralelas a LT, cuya distancia al punto "A^h" sea igual a "Δy AB". Los puntos de intersección de dichas rectas con la circunferencia en proyección horizontal nos permiten conocer aquellas posiciones de "B" (B_I, B_{II}, B_{III}, y B_{IV}), cuyas diferencias de vuelo con respecto a "A", corresponden a las que alcanza el segmento cuando β=30°. Es así que, mientras la cota de "B" sea menor que la de "A", el problema ofrece cuatro posibles soluciones al segmento AB.

Naturalmente, si la cota de "B" fuese mayor que la de "A" (ΔzB > ΔzA), aparecerían cuatro soluciones adicionales, para ofrecernos finalmente ocho posibles soluciones. En este caso, existirían cuatro parejas de segmentos respectivamente alineados determinando las posiciones de las cuatro rectas que los contienen.

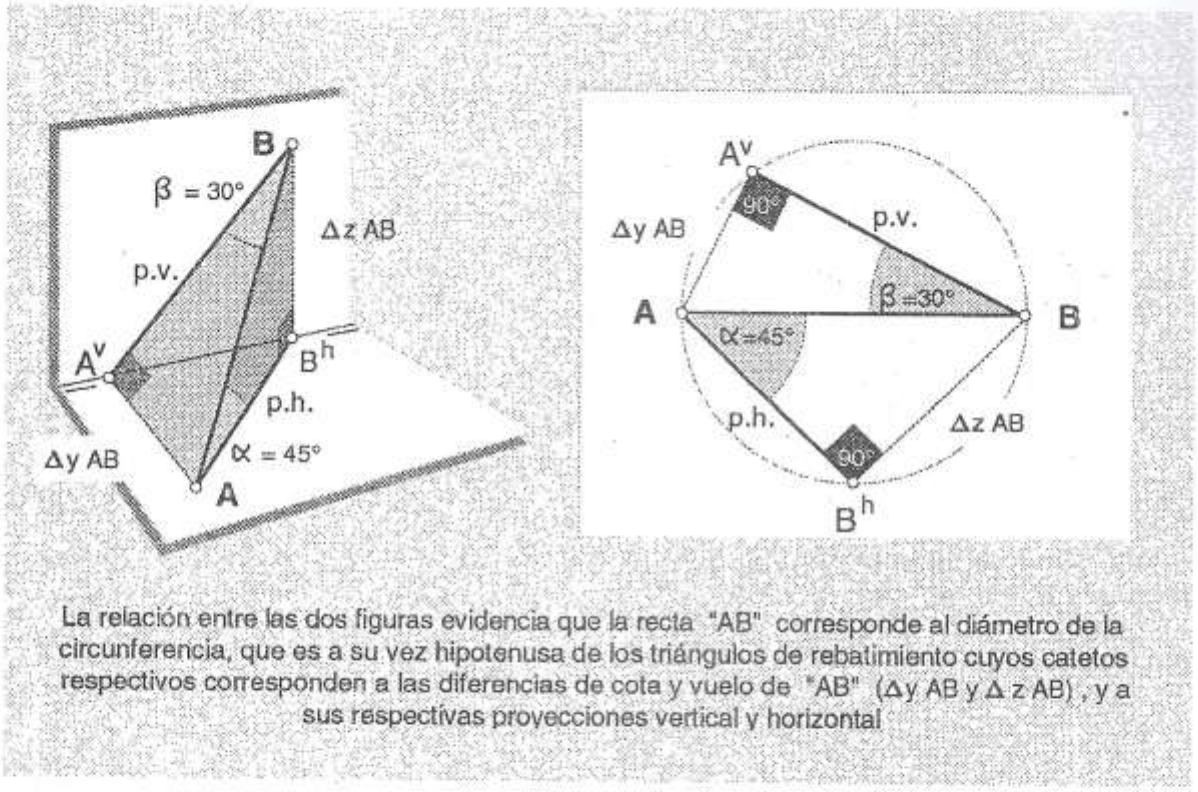
Por otra parte, si los ángulos fuesen complementarios, no hay duda de que las soluciones corresponderían a las de una recta DE PERFIL, caso en el cual obtendríamos cuatro posiciones distintas para el segmento "AB" y dos para las rectas que contienen las parejas alineadas.

Otra estrategia posible en la solución de este problema nos la ofrece la construcción simultánea de los Triángulos de Rebatimiento para ambas proyecciones los cuales, disfrutando de una hipotenusa común, pueden ser construídos basándose en un enunciado de la Geometría Plana conocido como el

TEOREMA DEL ARCO CAPAZ, el cual aparece ilustrado en la figura , y que establece que "EL TRIANGULO RECTANGULO CUYA HIPOTENUSA COINCIDE CON EL DIAMETRO DE UNA CIRCUNFERENCIA, ES RECTO EN UN PUNTO DE ELLA."



De este modo, partiendo de los datos del problema, nuestros resultados pueden ser encontrados, buscando previamente las magnitudes gráficas de las respectivas proyecciones " $A^h B^h$ " y "$A^v B^v$", del segmento " AB ", así como también las de las respectivas diferencias de cota y vuelo " Δz AB " y " Δy AB ".

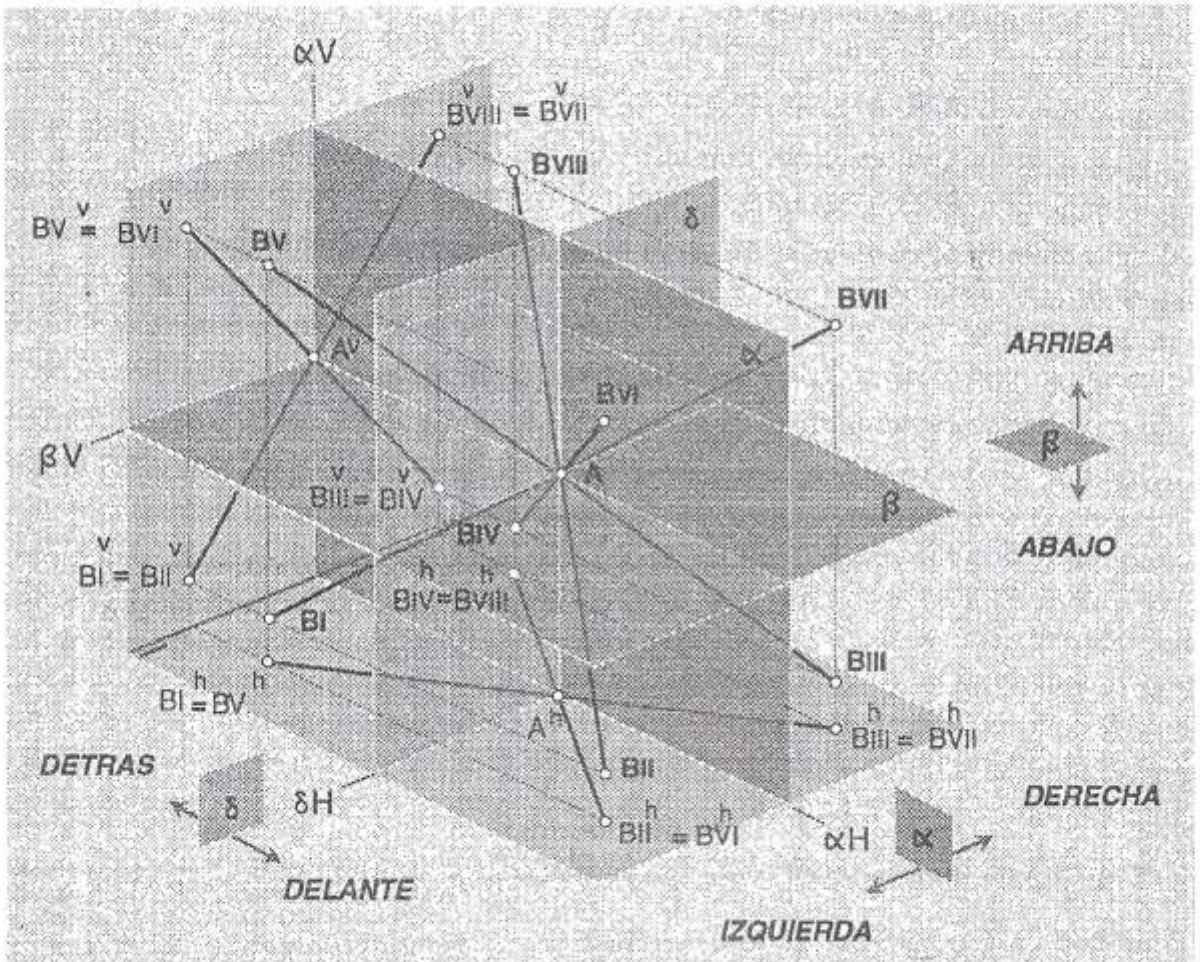


La relación entre las dos figuras evidencia que la recta "AB" corresponde al diámetro de la circunferencia, que es a su vez hipotenusa de los triángulos de rebatimiento cuyos catetos respectivos corresponden a las diferencias de cota y vuelo de "AB" (Δy AB y Δ z AB), y a sus respectivas proyecciones vertical y horizontal

Estas magnitudes, transladadas convenientemente a las proyecciones correspondientes, nos conducen a las mismas soluciones que encontramos por la vía anterior. Fíjese muy bien que el tamaño de la proyección horizontal "p.h." corresponde al radio de la circunferencia que expresa la trayectoria del punto "B^h" alrededor de "A^h" mientras que el tamaño del segmento "Δy BA", expresa el Lugar Geométrico de todos los puntos de dicho plano cuya diferencia de vuelo con respecto a "A", es la encontrada.

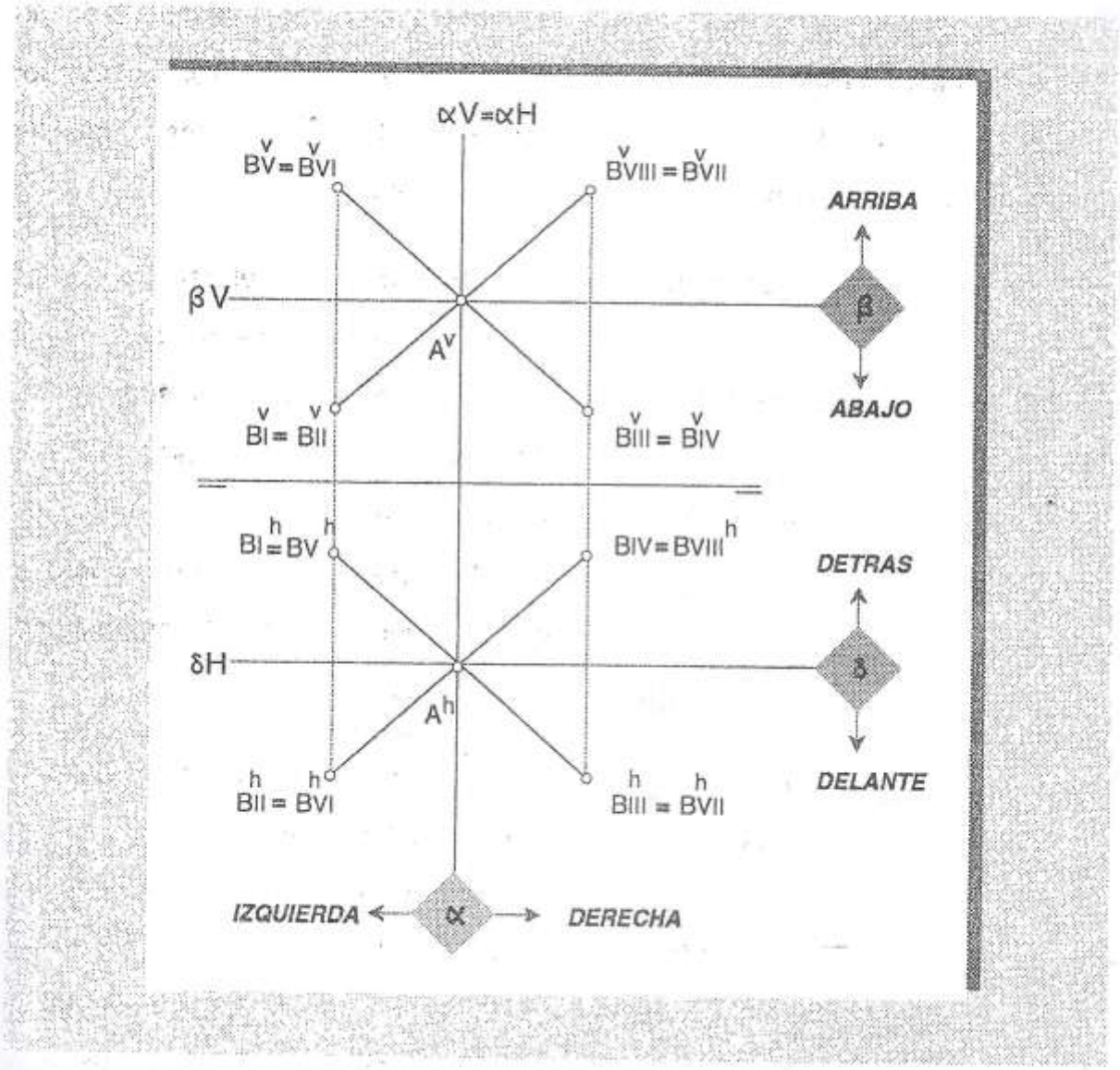
Exactamente el mismo razonamiento es aplicable a la determinación de las proyecciones verticales al transladar las magnitudes de la proyección vertical "p.v." y la diferencia de cota " Δz AB ", a sus posiciones respectivas.

Por esta vía se evidencia claramente la naturaleza de las ocho soluciones que puede ofrecer este problema, la cual entenderemos mejor al observar los gráficos siguientes.



El gráfico expresa las posiciones de los segmentos ABI, ABII, ABIII, ABIV, ABV, ABVI, ABVII y ABVIII, los cuales representan las ocho posibles soluciones al problema de determinar las proyecciones de un segmento cuya magnitud y ángulos con los planos de proyección son conocidos. Observe cuidadosamente como se comporta el punto B en sus diversas posiciones, con respecto al punto A". El plano "α" es el límite entre los puntos que tienen mayor y menor orígen que "A". De igual modo, el plano "β" representa el límite entre aquellos puntos que tienen mayor y menor cota que "A", mientras que el plano "δ" lo es para aquellos puntos que tienen mayor y menor vuelo que "A".

El gráfico de la página siguiente nos ofrece la representación diédrica de la situación descrita espacialmente por el gráfico de esta página. Compare cuidadosamente ambas figuras y verifique cómo la naturaleza de las direcciones en el espacio se refleja directamente en esta representación.



Usualmente los problemas en los que intervienen segmentos que forman ángulos dados con los planos de proyección, no nos exigen determinar todas sus soluciones. Es común que ubiquemos tan solo aquella proyección que es significativa para lo fines propios del ejercicio tratado, la cual, por regla general, viene ya requerida, bien por los términos del enunciado del problema, o por que su propia dinámica de resolución nos obliga a determinar específicamente una de sus soluciones.

Es por esa razón, que usualmente la descripción dada por el enunciado del problema contiene la información necesaria para determinar la solución que nos interesa. Esta información se nos brinda en forma verbal, a través de las referencias de posición del segmento buscado, con respecto a un punto.

En los gráficos podemos observar las indicaciones de dichas referencias (arriba, abajo, delante, detrás, a la izquierda y a la derecha) de los diferentes sectores en los que se encuentra cada uno de los segmentos señalados, con respecto a un punto "A", el cual coincide con la intersección común entre los tres planos $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ y $\{\gamma\}$. Así, todo lo que está a la izquierda y a la derecha del punto "A", lo está con respecto al plano $\{\alpha\}$; todo lo que está por arriba y por debajo de dicho punto, lo está con respecto al plano $\{\beta\}$; mientras que, finalmente, todo aquello que está por delante o por detrás del punto, lo está con relación al plano $\{\gamma\}$.

Fíjese muy bien que la dirección que califica a cada segmento, se identifica con la del sector correspondiente de espacio comprendido entre los tres planos señalados. Para su correcta identificación, cualquier descripción verbal sobre la posición de cada segmento, además de indicarnos con referencia a cual punto se ubica (en este caso "A"), debe expresarse necesariamente en función de tres de dichas referencias de posición, así como lo indicamos, por ejemplo, para la posición "AB_I" del segmento "AB", del que diremos que desciende (está por <u>debajo</u>), a la <u>izquierda</u> y por <u>detrás</u> de "A". La posición del mismo está también conjuntamente expresada por las tres relaciones siguientes: "$\Delta xA > \Delta xB$", "$\Delta yA > \Delta yB$" y "$\Delta zA > \Delta zB$", es decir, el segmento "AB_I" está ubicado de modo que el punto "A" tiene mayores origen, vuelo y cota que el punto "B".

Es importante apreciar cuidadosamente la correspondencia existente entre dichas referencias de posición en la representación espacial y en la representación

diédrica. Note muy cuidadosamente que lo que está a la izquierda y a la derecha, afecta por igual a las dos proyecciones, mientras que lo que está por arriba y por debajo, se aprecia solamente en la proyección vertical, con relación a la imagen respectiva (A^v) del punto de referencia (en este caso "A"). Igualmente, todo lo que está por delante y por detrás de "A", es apreciable exclusivamente en proyección horizontal, con respecto a la imagen horizontal (A^v) de dicho punto.

Todo lo que hemos dicho puede asimilarse perfectamente a la realidad, si no olvidamos que para poder comprender cabalmente el significado de las representaciones diédricas, es imperativo no obviar nuestra presencia protagónica como observadores dentro del conjunto diédrico. De hecho, si estamos "parados" frente a una pared , viendo al punto "A" suspendido en el espacio, es absolutamente obvio que las diferencias de altura, es decir, lo que está por arriba o por debajo de "A", quedarán reflejadas en la pared (plano vertical de proyección). Así mismo, si "flotamos" en el espacio, observando al punto en dirección ortogonal al piso, (plano horizontal de proyección), todo lo que está por detrás o por delante de "A", debe verse solamente en proyección horizontal. Por supuesto, es indiferente estar en cualquiera de esas posiciones para apreciar qué está a la izquierda y qué a la derecha.

En este capítulo hemos profundizado todos aquellos aspectos que tienen que ver con el comportamiento de la recta en el espacio diédrico. Este conocimiento, así como todos aquellos previos a este capítulo, es fundamental para ingresar en el tratamiento de los elementos geométricos que nos quedan por estudiar (el plano y los sólidos) y sus relaciones en el espacio, los cuales, toda vez que incorporan a la recta dentro de su constitución morfológica, no pueden -de ninguna manera- obviarla.

6. LA RECTA

CUESTIONARIO

1. ¿Qué es una línea recta?
2. ¿Qué es un segmento de recta?
3. ¿Qué indica un segmento de recta?
4. ¿Qué es el Verdadero Tamaño de un segmento?
5. ¿Cuál condición debe cumplirse para que un segmento muestre su Verdadero Tamaño en proyección?
6. ¿Entre cuáles elementos quedan expresados los ángulos que un segmento forma con cada uno de los planos de proyección?
7. ¿Cuales posiciones puede ocupar un segmento con respecto a un plano?
8. ¿Cuál es la condición que define a cada una de las rectas en las posiciones particulares señaladas a continuación? ¿ Diga cuáles de sus proyecciones se muestran en Verdadero Tamaño? ¿Indique igualmente entre cuáles elementos quedan revelados los ángulos "α" y "β" que forman con los planos de proyección?

I. Recta Horizontal _____

VT_____ α _____ β _____

II. Recta Frontal_____

VT_____ α _____ β _____

III. Recta Paralela a la LT_____

VT_____ α _____ β _____

IV. Recta De Pie_____

VT_____ α _____ β _____

V. Recta De Punta_____

VT_____ α _____ β _____

VI. Recta De Perfil_____

VT_____ α _____ β _____

VII. Recta Cualquiera_____

VT_____ α _____ β _____

9. ¿En qué consiste la aplicación del GIRO a la determinación del VT y de los ángulos "α" y "β" ?
10. ¿En qué consiste la aplicación del CAMBIO DE PLANOS a la determinación del VT y de los ángulos "α" y "β" ?
11. ¿En qué consiste la aplicación de los TRIANGULOS DE REBATIMIENTO a la determinación del VT y de los ángulos "α" y "β" ?

12. COMPLETE LAS SIGUIENTES ASERCIONES:

A.- Una recta que forma los ángulos $\alpha = \beta = 45°$ es una recta _____

B.- Un punto de cota CERO, contenido en una recta se llama _____

C.- Una recta que forma 90° con el Plano Vertical de Proyección es una recta _____

D.-Si en una recta se cumple que $\alpha = \beta$, sus trazas deben ser _____ con respecto a la Linea de Tierra.

E.- Una recta que forma 0° con la Linea de Tierra es una recta _____

F.- A una recta que forma 90° con la Linea de Tierra es una recta _____

G.- Una recta sin trazas es una recta _____

H.- Una recta que forma 0° con el Plano Horizontal de Proyección es una_____

I.- A una recta que, en general, cumple con la condición $0° < \alpha + \beta < 90°$ se le conoce con el nombre de recta _____

J.- Una recta que forma 90° con el Plano Horizontal de Proyección se conoce con el nombre de recta _____

K.- A un punto de una recta contenido en el Plano Vertical de Proyección se le conoce con el nombre de _____

L.- Una recta que forma 0° con el Plano Vertical de Proyección se conoce con el nombre de recta _____

M.- Una recta cuya proyección vertical está sobre la LT se llama _____

13. ¿Diga en cuál posición están las rectas cuyos ángulos se indican a continuación?

I. $\alpha = 60°$
$\beta = 30°$ _____

II. $\alpha = 0°$
$\beta = 0°$ _____

III. $\alpha = 0°$
$\beta = 90°$ _____

IV. $\alpha = 0°$
$\beta = 60°$ _____

V. $\alpha = 90°$
$\beta = q$ _____

VI. $\alpha = 45°$
$\beta = 30°$ _____

VII. $\alpha = 45°$
$\beta = 0°$ _____

VIII. $\alpha = 90°$
$\beta = 45°$ _____

14. ¿Diga en cuál posición están los segmentos cuyas coordenadas se indican a continuación?

I. A (10, 33, 87); B (42, 33, 62) _____

II. C (17, 17, 17); D (17, 33, 33) _____

III. E (56, 34, 93); F (22, 44, 66) _____

IV. G (32, 43, 92); H (66, 17, 92) _____

V. J (64, 64, 64); K (64, 64, 16) _____

VI. M (57, 14, 57); N (57, 57, 57) _____

VII. P (00, 00, 00); Q (64, 00, 00) _____

VIII. R (57, 14, 57); S (57, 14, 57) _____

15. ¿ Enuncie el Teorema del ARCO CAPAZ?

16. ¿ Cuál es la utilidad del Teorema del Arco Capaz en la determinación del VT de un segmento y sus ángulos con los Planos de Proyección?

17. ¿Si una proyección de una recta se ve como un punto, como debe ver se su otra proyección?

18. ¿Si una proyección de una recta se ve paralela a la LT, como debe verse su otra proyección?

19. ¿ Si una proyección de una recta muestra su VT, como debe verse su otra proyección?

20. ¿ Qué es un Triángulo de Rebatimiento ?

21. ¿ Cuál es su utilidad ?

22. ¿Porqué razón, al determinar los ángulos que una recta DE PERFIL forma con los planos de proyección, ambos ángulos aparecen revelados en su magnitud real en la misma imágen ?

23. ¿ Porqué razón las proyecciones de una recta DE PERFIL son ambas perpendiculares a la Línea de Tierra ?

EL PLANO

El plano, al igual que el punto y la recta, con los cuales integra los tres elementos geométricos fundamentales, se entiende en geometría sólo como un concepto. En el mundo real, la idea del plano la obtenemos —por ejemplo— a partir de nuestra percepción de la superficie de una mesa lisa de vidrio, o de un lago en calma.

Geométricamente, podemos imaginar al plano como la trayectoria descrita por una línea recta que se desplaza paralelamente a sí misma en una dirección. De este modo, siendo la recta una entidad sin espesor, el plano tambien lo es, y quizás podríamos imaginarlo como una delgada y sutil película que se extiende ilimitadamente en el espacio.

NOMENCLATURA

Así como, en general, los PUNTOS se denotan con letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B, C, D, E,....) y las RECTAS con minúsculas (a, b, c, d, e, ...), los PLANOS se denotan con letras griegas minúsculas (α, β, γ, δ, ϵ, ...), encerrados entre "{ }" para evitar que la presencia de otros elementos diferentes que se denoten con los mismos caracteres, pueda inducir alguna confusión.

El plano expresa en sí mismo una frontera, un límite, una *interfase* , que separa el espacio. Justamente, al concluir el capítulo anterior, vimos que dentro de los límites de la geometría cartesiana, los significados de ARRIBA y ABAJO, se comprenden en referencia a un plano horizontal { β } , que los separa como entidades distintas; asímismo IZQUIERDA y DERECHA se distinguen en relación a un plano vertical (de perfil, sagital) { α }, que se extiende hacia ADELANTE y hacia ATRAS, entidades a su vez separadas por otro plano vertical (frontal) { δ }, que en conjunción con los anteriores integran un conjunto de tres planos ortogonales dispuestos de una manera que suele llamarse TRIEDRO TRIRECTANGULAR (tres lados - tres ángulos

rectos). Así, el espacio queda dividido en ocho sectores, cada uno de los cuales comparte respectivamente tres de estas cualidades.

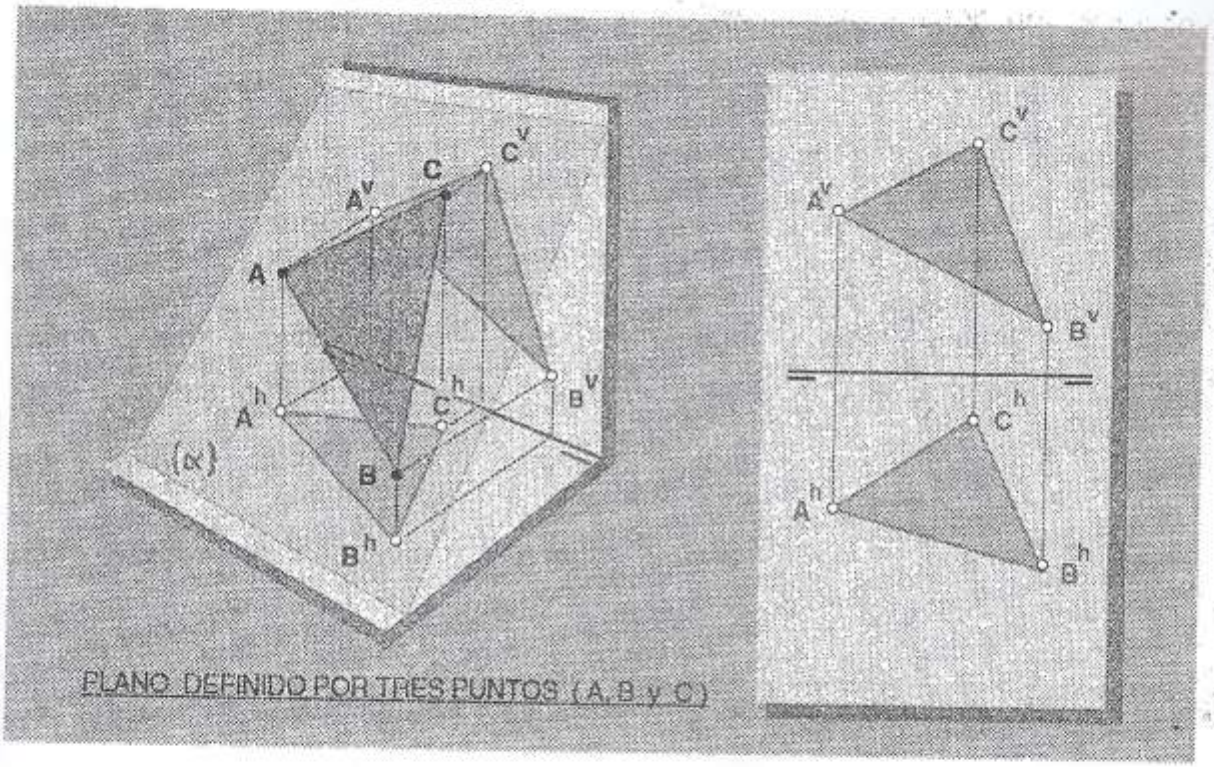
Es sencillo comprender, por otra parte, que sobre un plano podamos identificar infinitas direcciones, y entre ellas dos direcciones ortogonales relacionadas respectivamente a dos dimensiones, como por ejemplo el largo y el ancho, conceptos que si bien no hemos definido, hemos manejado intuitivamente desde niños. Sin embargo, conceptualizado como una entidad geométrica, el plano es inconmensurable; su extensión es infinita. De manera que -al igual que la recta- para poder utilizarlo en nuestro entorno finito nos valemos de los elementos contenidos en él (puntos, segmentos de recta y polígonos), que lo definen en el espacio, lo expresan y lo hacen manipulable.

BAJO CUALES FORMAS SE PRESENTA EL PLANO EN EL ESPACIO ?

En el espacio, un plano puede definirse a través de la combinación discreta de puntos y rectas, como lo veremos a continuación. Observe y analice cuidadosamente las figuras mostradas en cada caso, haciendo énfasis en la relación entre la representación espacial y la diédrica.

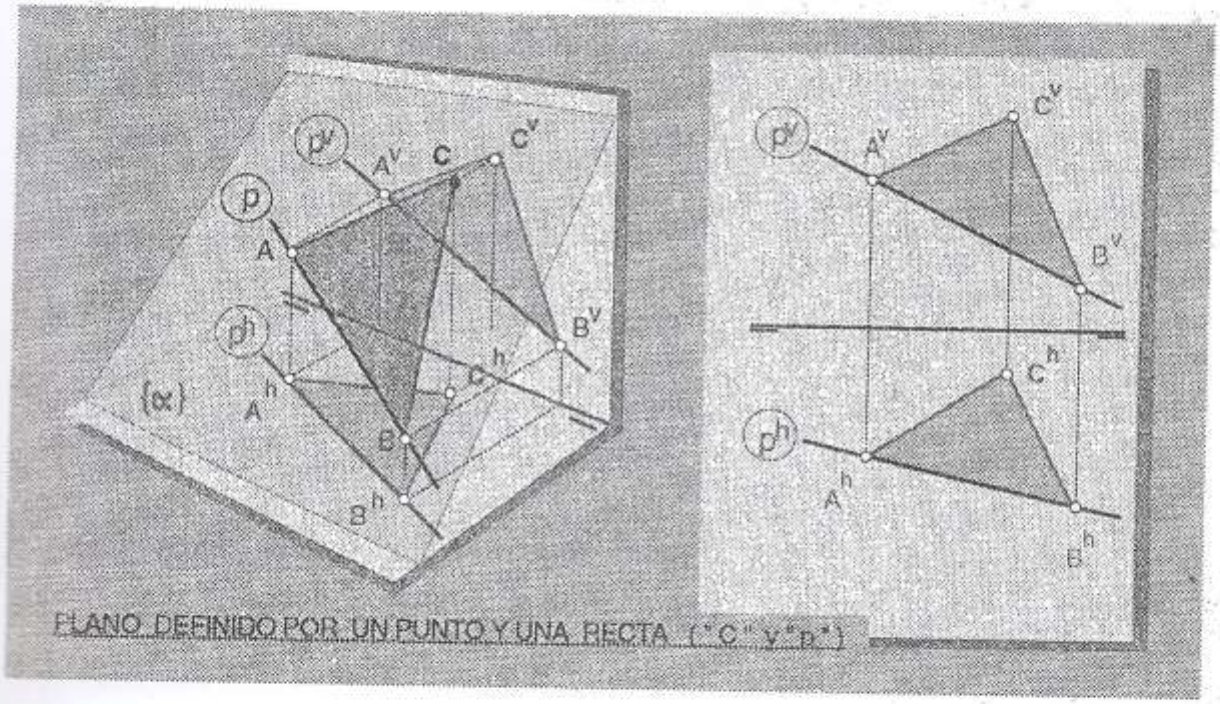
En cada uno de los casos expuestos seguidamente, aún cuando el plano aparece expresado a traves de elementos geométricos distintos, se trata siempre del mismo plano {α}, el cual ocupa siempre la misma posición en el espacio. Es así que el triángulo "ABC", el cual se asocia al primer ejemplo (plano definido por tres puntos) aparece dibujado en cada uno de los casos subsiguientes, como para establecer un nexo común , en una demostración de que el mismo plano puede manifestarse en formas diversas. Igualmente, en cada uno de los casos, los elementos que definen al plano se resaltan en línea contínua mas oscura y su nomenclatura se denota en **negritas**.

PLANO DEFINIDO POR TRES PUNTOS



PLANO DEFINIDO POR TRES PUNTOS (A, B y C)

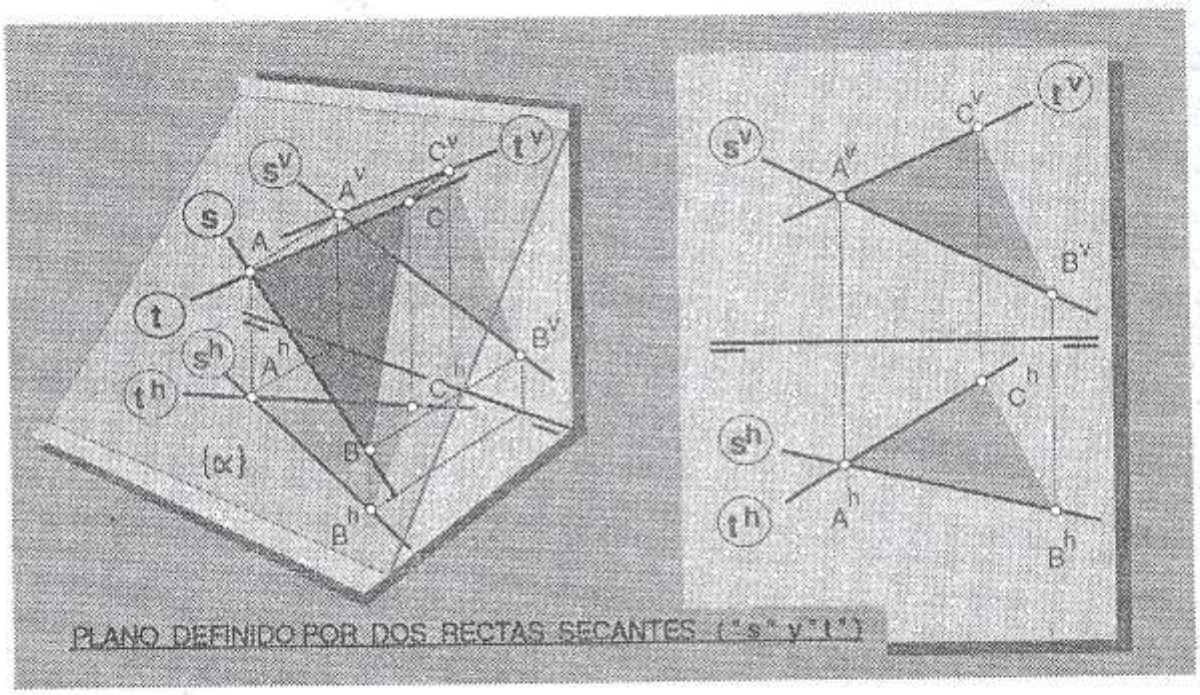
PLANO DEFINIDO POR UN PUNTO Y UNA RECTA.



PLANO DEFINIDO POR UN PUNTO Y UNA RECTA ("C" y "p")

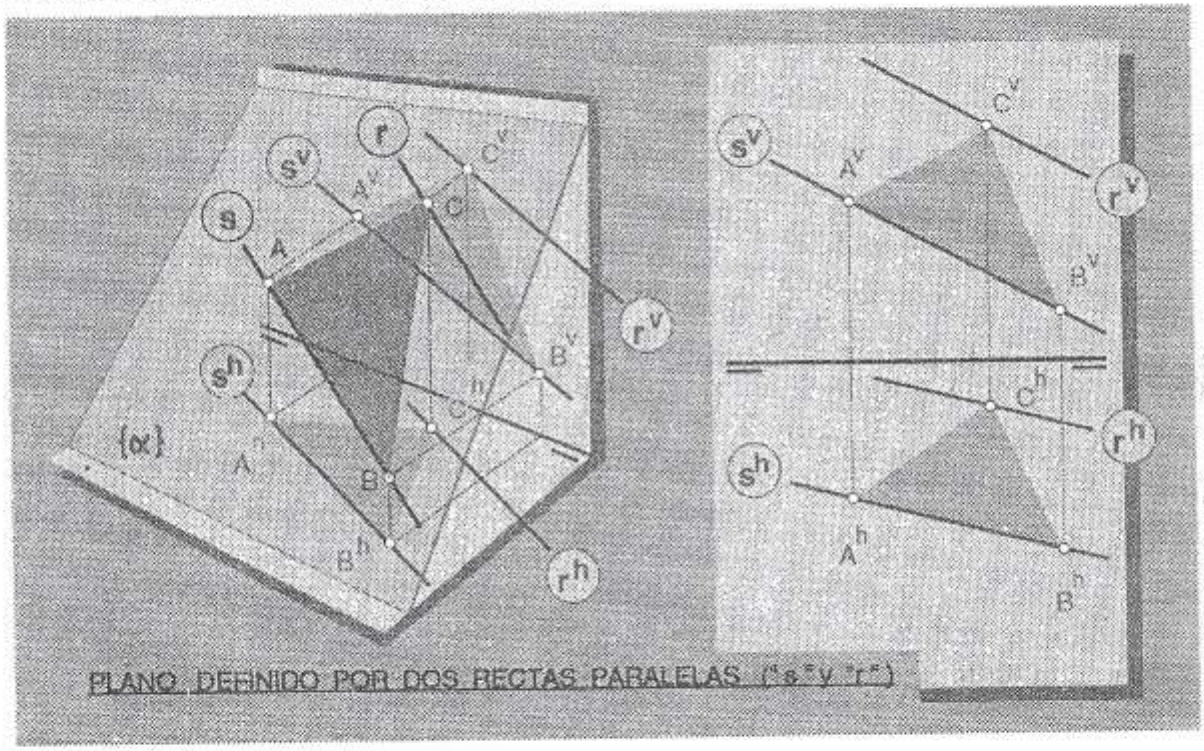
7. EL PLANO

PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS SECANTES



PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS SECANTES ("s" y "t")

PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS PARALELAS



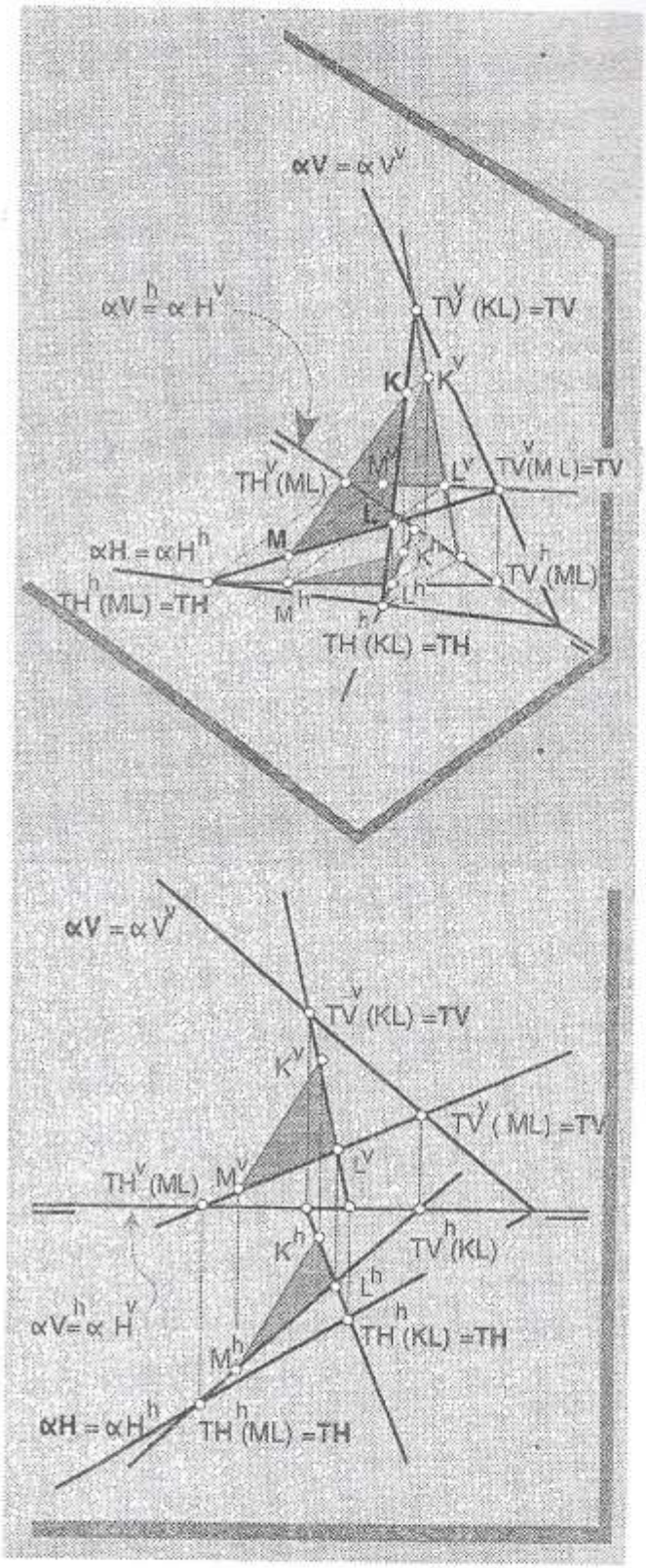
PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS PARALELAS ("s" y "r")

TRAZAS DEL PLANO

Cuando tratamos la recta en el capítulo anterior, vimos que las trazas de una recta tienen un punto en común con cada uno de los planos de proyección. El plano, si fuese concebido como un haz de rectas "coplanares", intersectaría a los planos de proyección de modo que cada una de esas rectas participaría de la intersección con dichos planos a traves de puntos que se ordenan a lo largo de sendas lineas rectas que se conocen como TRAZAS DEL PLANO.

Las trazas de un plano son pues, dos líneas rectas que resultan de la intersección de un plano {α} con cada uno de los planos de proyección, de tal modo que pueden entenderse como rectas que están contenidas respectivamente en tales planos.

La traza vertical (**αV**), es pues una recta FRONTAL cuyo vuelo es igual a CERO, razón por la cual ella misma se confunde con su propia proyección vertical ($\alpha V = \alpha V^v$) y en consecuencia, su proyección horizontal (αV^h) se confunde con la LT.



De manera análoga ocurre con la traza horizontal (**αH**), cuyo comportamiento es el de una recta HORIZONTAL de cota igual a cero la cual, naturalmente, ocupa el mismo lugar de su propia proyección horizontal ($\alpha H = \alpha H^h$), mientras que su proyección vertical (αH^v) aparece sobre la Línea de Tierra.

Observe que, en el caso del plano mostrado, ambas trazas se cortan en el mismo punto sobre la Línea de Tierra, característica común a todos los planos que no son paralelos a ella y que, como veremos mas adelante, no satisfacen aquellos que sí cumplen esa condición

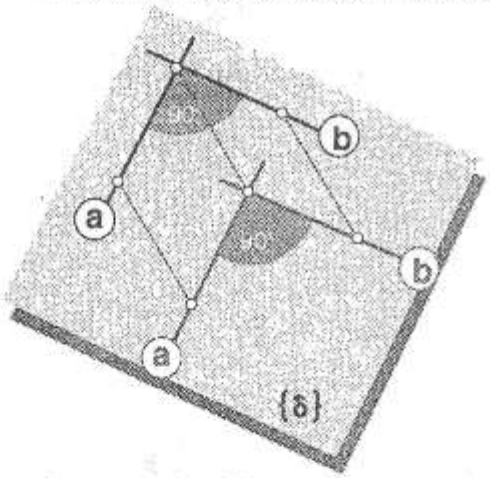
Debido a que desde el punto de vista geométrico, una recta queda determinada por dos puntos, la localización de las trazas de un plano es un procedimiento sencillo que, en su más elemental interpretación, se lleva consecuentemente a cabo haciendo uso, en principio, de rectas escogidas a discreción, tal como aparece ilustrado en la figura que dejamos en la página precedente.

Tomando en cuenta que, en la generalidad de los casos, las trazas de los planos comparten un punto común sobre la Línea de Tierra, es obvio que la determinación de dos pares respectivos de puntos de trazas de dos rectas del plano, puede reducirse tan solo a la determinación de tres de ellos. De hecho, al localizar en nuestro ejemplo, las respectivas trazas verticales de dos rectas [TV^v (KL) y TV^v (ML)] podemos establecer la posición de la traza vertical (**αV**) del plano la cual, encuentra su punto común con la traza horizontal (**αH**) al prolongarse hasta la Línea de Tierra, haciendo suficiente la determinación de una sola traza horizontal de alguna de las rectas del plano, para encontrar a la traza horizontal de dicho plano. Esta simplificación es sana desde al punto de vista de la técnica de dibujo, toda vez que nos permite obviar la eventual contingencia de no poder hacer coincidir el punto de corte de ambas trazas sobre la Línea de Tierra. En el dibujo técnico, la vía mas corta es siempre la más precisa.

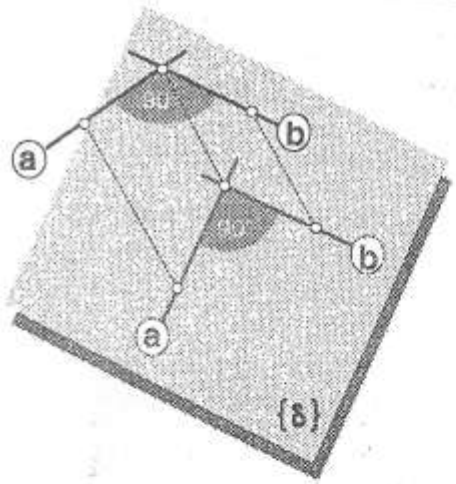
ANGULOS DEL PLANO CON LOS PLANOS DE PROYECCION

PROPIEDAD PROYECTIVA DEL ANGULO RECTO.

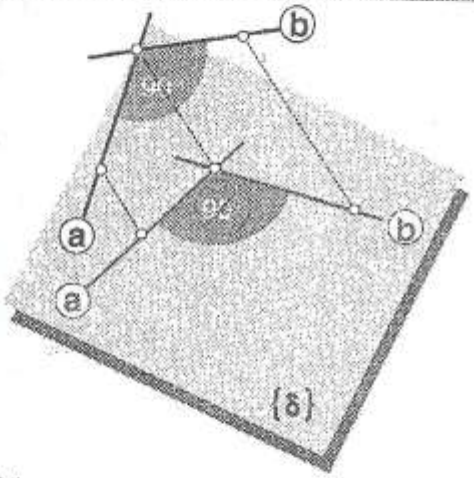
Un ángulo recto solo se proyecta como tal, cuando al menos una de las rectas que lo forman, es paralela o pertenece al plano sobre el cual dicho ángulo se proyecta.



Los segmentos "a" y "b" son ambos paralelos al plano {δ}, por tanto el ángulo recto muestra su magnitud real en proyección



Solo el segmento "b" es paralelo al plano {δ} y el ángulo recto muestra su magnitud real en proyección.



Ninguno de los segmentos que determinan al ángulo recto es paralelo al plano {δ}, razón por la cual no muestra su verdadera magnitud

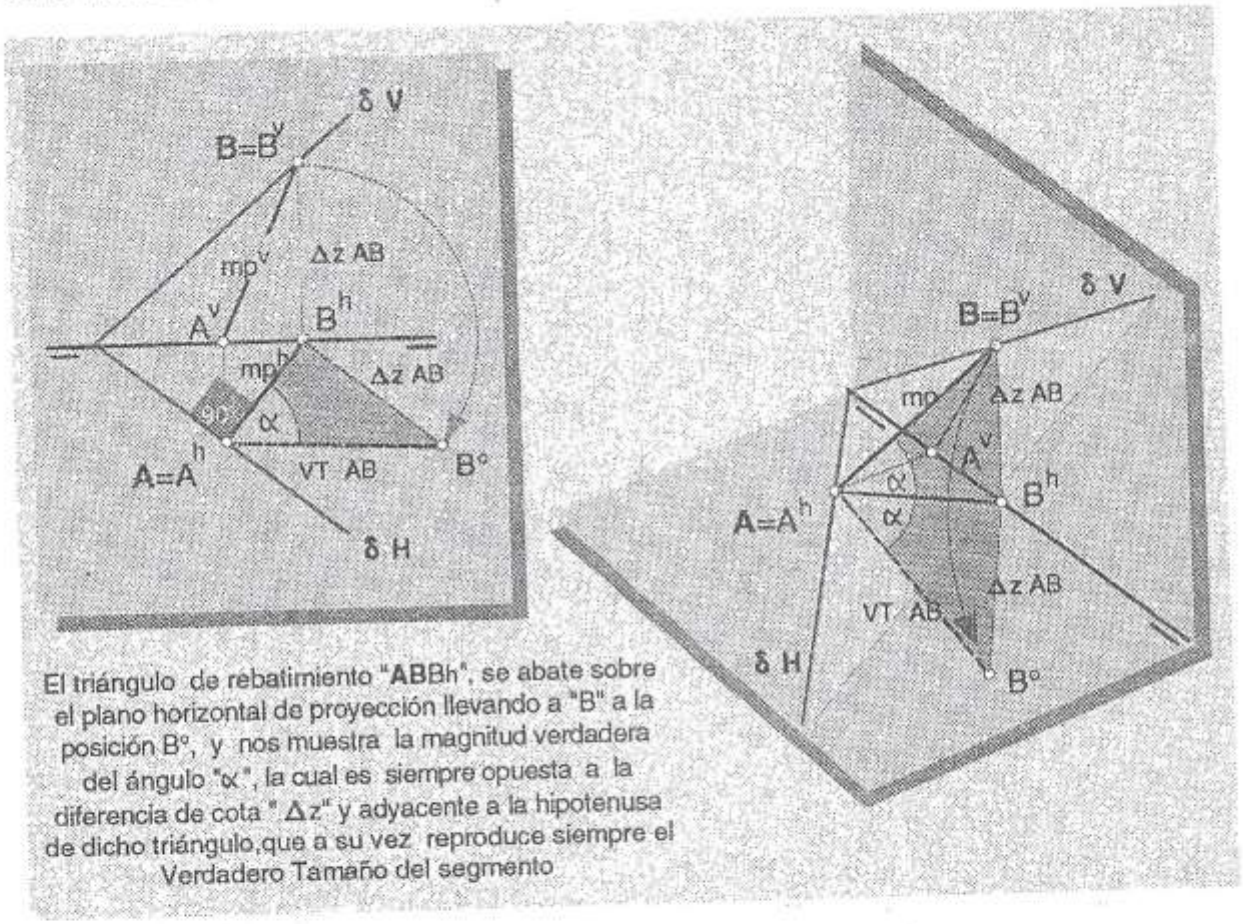
ESTA PROPIEDAD, EXCLUSIVA DEL ANGULO RECTO, NO ES DISFRUTADA POR ANGULOS CON VALORES DISTINTOS, PUES EN SUS CASOS, ELLOS SOLO MUESTRAN SU MAGNITUD REAL EN PROYECCION CUANDO SUS DOS LADOS SON PARALELOS AL PLANO SOBRE EL CUAL SE PROYECTAN, EXCEPCION HECHA POR SUPUESTO DE LOS ANGULOS DE 0° Y 180 °, LOS CUALES TIENEN SUS DOS LADOS CONFUNDIDOS EN UNA MISMA RECTA.

7. EL PLANO

Las figuras de la página precedente, nos muestran los tres casos posibles en los cuales el ángulo recto puede ubicarse con respecto a un plano de proyección.

RECTA DE MAXIMA PENDIENTE

La RECTA DE MAXIMA PENDIENTE (mp) es aquella recta del plano que expresa la magnitud del ángulo "α" que dicho plano forma con el Plano Horizontal de Proyección. En las figuras siguientes, el segmento AB, representa a la Recta de Máxima Pendiente "mp" la cual, en el espacio, es ortogonal a la traza horizontal "**δH**" del plano correspondiente. En virtud de la propiedad proyectiva del ángulo recto, la "mp" queda expresada por la proyección horizontal "A^hB^h", formando 90° con la traza horizontal "**δH**".

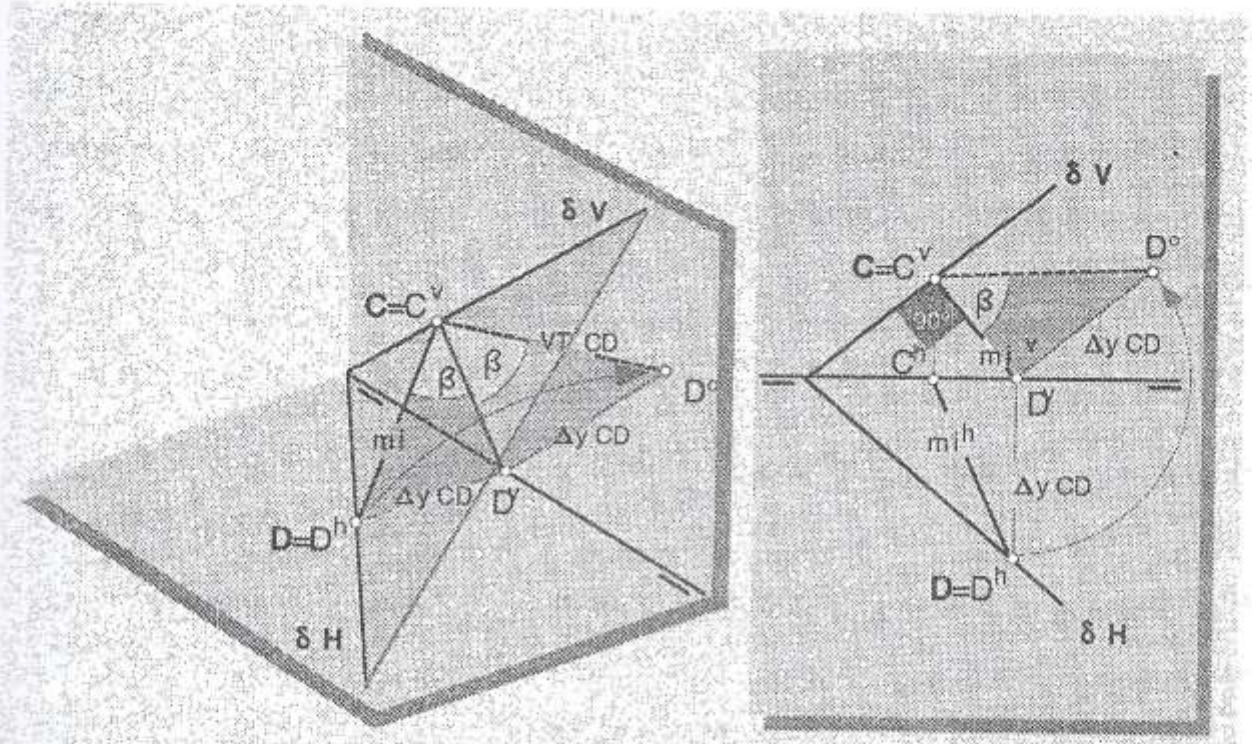


El triángulo de rebatimiento "ABBh", se abate sobre el plano horizontal de proyección llevando a "B" a la posición B°, y nos muestra la magnitud verdadera del ángulo "α", la cual es siempre opuesta a la diferencia de cota " Δz" y adyacente a la hipotenusa de dicho triángulo,que a su vez reproduce siempre el Verdadero Tamaño del segmento

La determinación gráfica de esta magnitud en DPO, supone la reconstrucción del triángulo de rebatimiento para dicha proyección horizontal "A^hB^h", el cual está expresado en la figura espacial por el triángulo sombreado "**A-B**-B^h". Toda vez que en el espacio, la diferencia de cota "**Δz AB**" es perpendicular a la proyección horizontal "A^hB^h" del segmento **AB**, dicho triángulo puede ser fácilmente replicado en DPO al reproducir esta relación. Es obvio, que el ángulo buscado se localiza sobre dicho triángulo entre el VT de AB y su proyección horizontal "A^hB^h", opuesto naturalmente a "Δz AB".

RECTA DE MAXIMA INCLINACION

Así como la recta anterior, la RECTA DE MAXIMA INCLINACION (mi), permite determinar gráficamente la magnitud real del ángulo "β" que un plano forma con el Plano Vertical de Proyección.



El triángulo de rebatimiento "CDDv", se abate sobre el plano vertical de proyección llevando al punto "D" a la posición D°, y nos muestra la magnitud verdadera del ángulo "β", la cual es siempre opuesta a la diferencia de vuelo "Δy" y adyacente a la hipotenusa de dicho triángulo,que reproduce siempre el Verdadero Tamaño del segmento

La determinación de este ángulo en DPO, sigue una pauta semejante a la del caso previo. La recta "mi" -representada en la figura por el segmento **CD**- es, en el espacio, ortogonal a la traza vertical "**δV**" del plano, por lo que su proyección vertical "C^VD^V", cumple exactamente la misma condición. La reconstrucción del Triángulo de Rebatimiento para la proyección vertical de "**CD**", permite localizar la magnitud de dicho ángulo en el vértice común al Verdadero Tamaño del segmento " VT CD " y dicha proyección "C^VD^V", es decir, en el vértice opuesto a la diferencia de vuelo **Δy CD**.

Observe cuidadosamente que los ángulos mencionados se asocian de manera respectiva a las rectas descritas, de tal manera que nunca -con excepción de un caso particular que veremos adelante- ambos aparecen disfrutando del mismo triángulo de rebatimiento. De manera que si necesitamos conocer la magnitud del ángulo "α" que un plano forma con el Plano Horizontal de Proyección, debemos acudir a la Recta de Máxima Pendiente; y para reconocer a "β", requerimos la Recta de Máxima Inclinación.

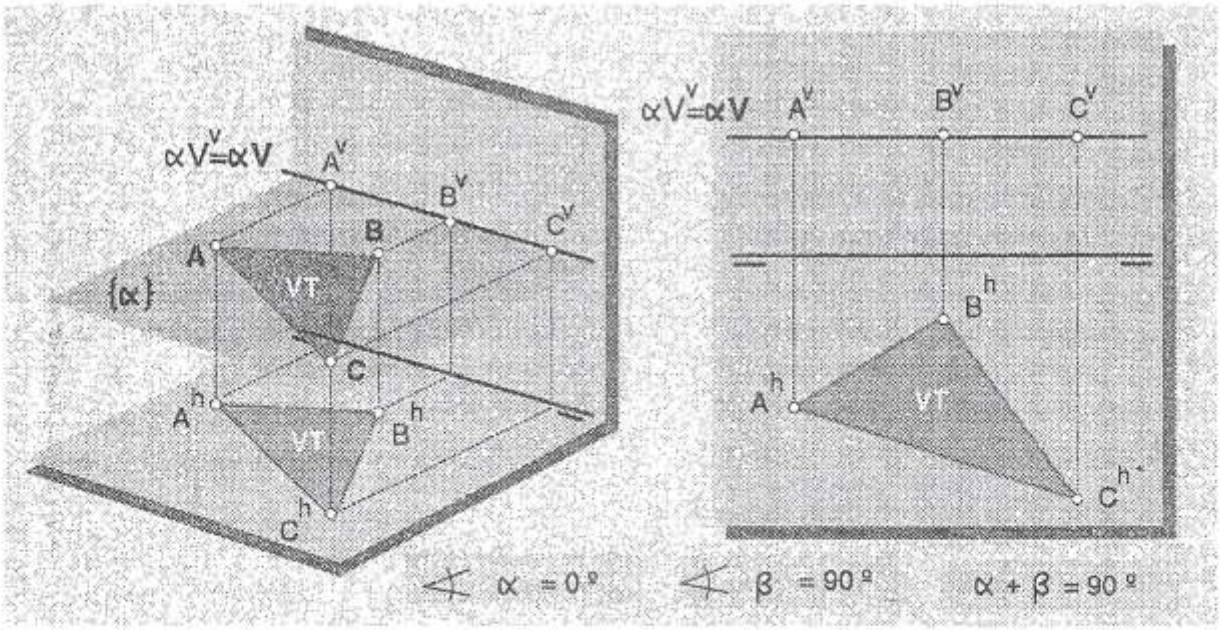
POSICIONES PARTICULARES DEL PLANO

PLANO HORIZONTAL

Un plano Horizontal es un plano paralelo al plano Horizontal de proyección. En este plano {α} solo distinguimos una traza, la vertical (**αV**), la cual se ubica paralela a la Línea de tierra, expresando así la magnitud del ángulo α = 0º que el plano forma con el PH.

Por otra parte, la distancia entre dicha traza y LT representa la cota de dicho plano, de tal manera que si el valor de su cota es Cero, dicho plano se confunde con el

plano horizontal de proyección, y por ello éste se entiende como un Plano Horizontal de cota Cero. La magnitud del ángulo $\beta = 90°$, es una consecuencia directa de su relación con el PH, toda vez que no hay otra alternativa posible, y aunque dicho ángulo no es expresado en proyección, es muy sencillo inferir su valor.

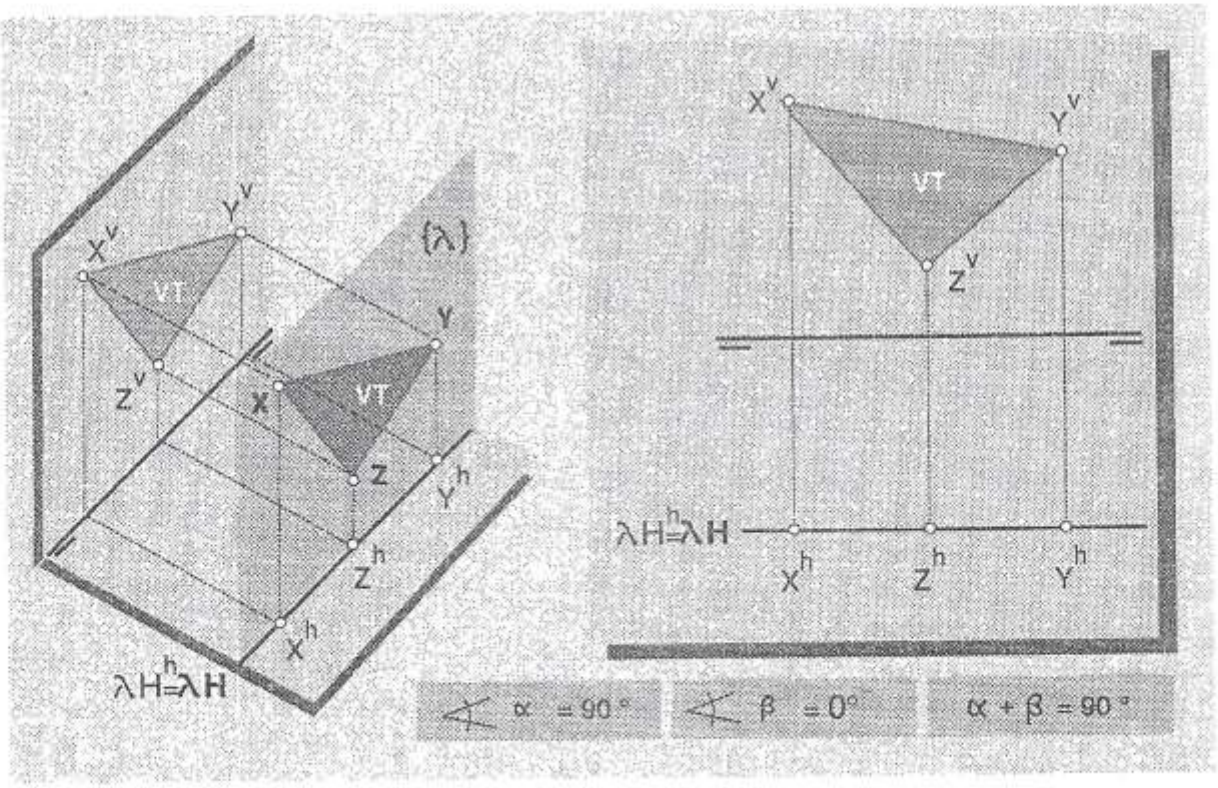


Gracias al hecho de ser paralelo al PH, cualquier elemento contenido en él, como el triángulo ABC, es visible en proyección horizontal A^h B^h C^h en su magnitud real, es decir, en Verdadero Tamaño. Consecuentemente, la proyección vertical A^v B^v C^v de dicho polígono, la cual se percibe como una sucesión rectilinea de puntos se ubica paralelamente a LT sobre la traza vertical **αV**.

Dado el caso que el valor de la cota fuese Cero, la proyección vertical de dicho polígono habrá de confundirse con la propia Línea de Tierra.

PLANO FRONTAL

Un plano Frontal es siempre paralelo al Plano Vertical de Proyección. Debido a que su vuelo puede tener cualquier valor, cuando éste alcanza una magnitud igual a Cero, su distancia al PV se anula, y ambos planos pasan a confundirse; de allí que el PV sea también considerado como un plano Frontal de vuelo igual a Cero.



Desde luego, se infieren fácilmente las similitudes entre las propiedades de un plano FRONTAL y un plano HORIZONTAL. Lo que uno satisface con respecto a otro de los planos de proyección, éste lo cumple con relación a aquel.

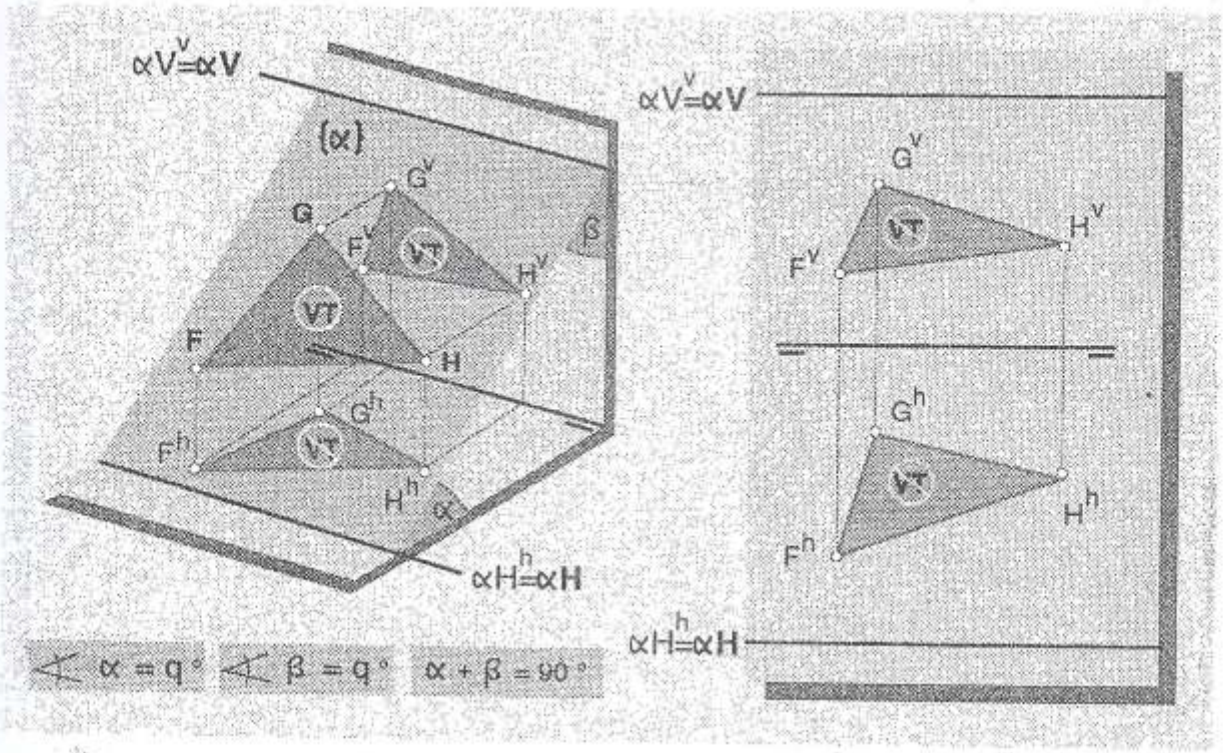
Así, el triángulo XYZ, contenido en dicho plano {λ}, aparece revelando su Verdadero Tamaño en la proyección vertical $X^V Y^V Z^V$, mientras su proyección horizontal $X^h Y^h Z^h$, se descubre paralela a la Línea de Tierra, confundida con la traza horizontal **λH** del plano considerado. De modo análogo que en el caso anterior, si el vuelo del plano se redujera a cero, la proyección horizontal del

referido polígono habría de estar confundida con la Línea de Tierra.

Toda vez que la condición que restringe la posición de este plano es precisamente la de ser paralela al PV, es natural que la traza vertical no exista. Como el valor del ángulo "β" siempre es 0°, la magnitud de α=90°, es una consecuencia de ello, la cual expresa la posición perpendicular entre el plano Frontal y el PH.

PLANO PARALELO A LA LINEA DE TIERRA

Un Plano Paralelo a la Linea de Tierra se reconoce, como su nombre lo indica, precisamente por ser paralelo a la Línea de Tierra.

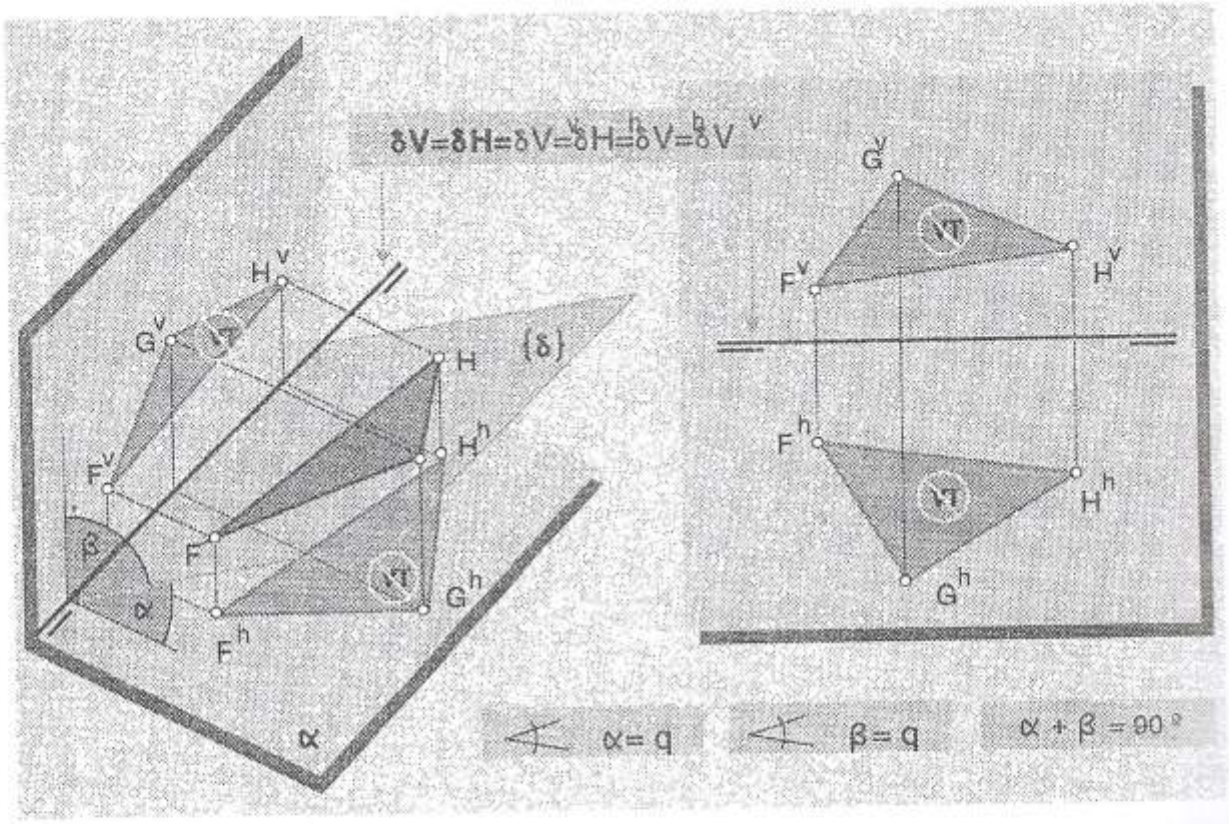


Sus trazas siempre se muestran en una posición paralela a la Línea de Tierra, haciendo evidente en esta relación la condición (de paralelismo) que define a dicho plano.

Consecuentemente, las posiciones de las rectas de Máxima Pendiente y Máxima Inclinación no permiten que las magnitudes de los ángulos "α" y "β" formados por

el plano con los planos de proyección, sean reveladas por ninguna relación perceptible en DPO. De modo que la determinación de los mismos deberá llevarse a cabo mediante la aplicación de alguno de los procedimientos conocidos. Es notable que la posición que dichas rectas ocupan en este plano es coincidente, de modo tal que se comportan como una sola recta en posición DE PERFIL en la que se funden ambas. Naturalmente, se cumple entonces que en todo PLANO PARALELO A LA LINEA DE TIERRA, "α" y "β" sean complementarios.

Puede darse el caso en que un plano como este {δ} contenga a la Línea de Tierra, como ocurre en el gráfico que muestra la figura siguiente.



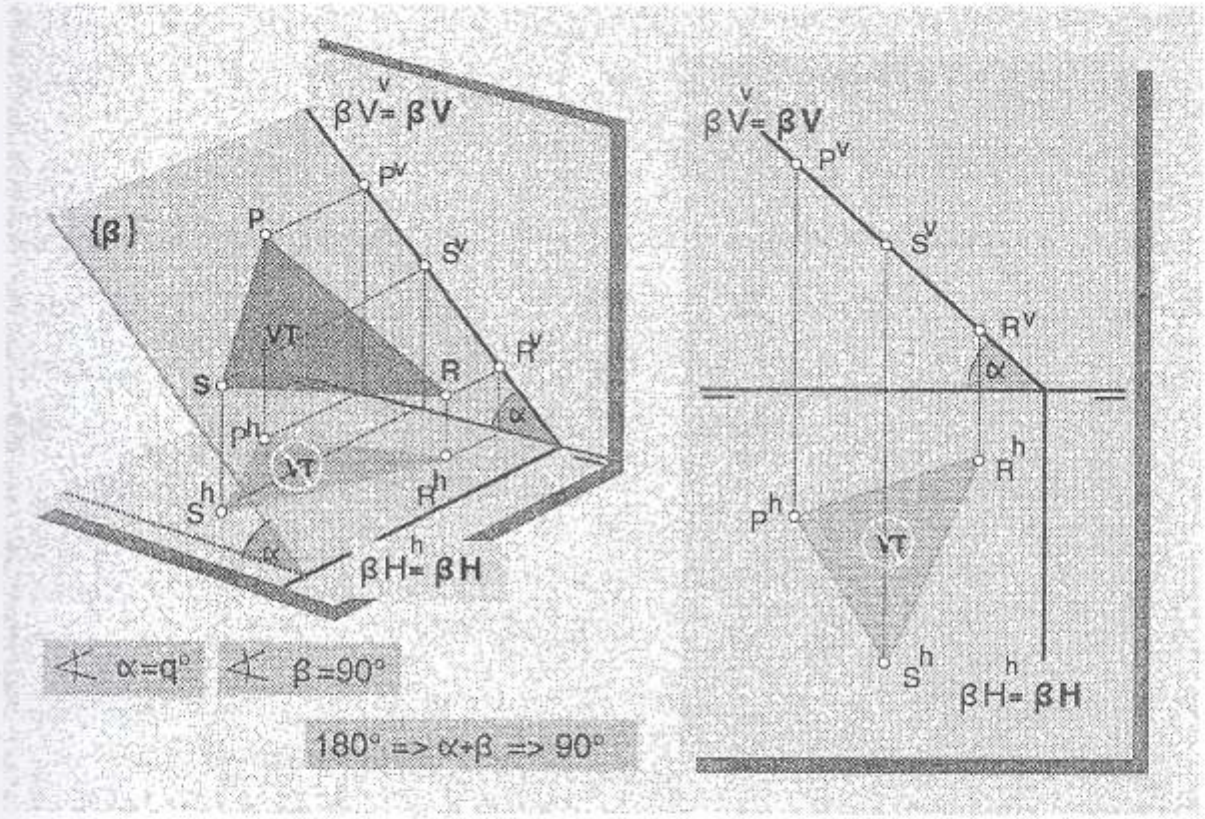
Observe que las trazas del mismo (δV y δH), como es natural, quedan confundidas con la Línea de Tierra, y de hecho también lo hacen sus respectivas proyecciones,

así como también los ángulos "α" y "β" son complementarios.

En este caso particular, la representación del plano es posible tan solo mediante la ubicación en el espacio de un punto cualquiera del mismo, toda vez que si la Línea de Tierra es parte de él, la presencia de un punto que le pertenezca es necesaria para que el plano se presente en una de sus formas típicas al quedar expresado mediante una recta (LT) y un punto.

PLANO PROYECTANTE VERTICAL

La condición que define un Plano Proyectante Vertical es ser perpendicular al plano vertical de proyección, de modo que la magnitud de su ángulo " β" es siempre igual a 90°.



En general, no existiendo ninguna otra condición restrictiva, el valor del ángulo α puede oscilar entre 0° y 90°, lo cual nos sugiere un plano que respetando su

relación ortogonal con el PV, puede ocupar cualquier posición con respecto al PH, ya sea esta paralela, perpendicular u oblícua.

Sin embargo, es preciso entender que, en particular, el nombre de Proyectante Vertical, como es el caso del plano {β} de la figura, lo toma aquel plano en donde se cumple que 0 º < α < 90 º, puesto que en aquellos casos donde dicho ángulo alcanza esos valores extremos, se distinguen otras propiedades particulares que los aislan como planos notables, valga decir respectivamente como PLANO HORIZONTAL y PLANO DE PERFIL, que ya hemos visto, con los cuales el Plano Proyectante Vertical comparte la propiedad común de ser perpendicular al PV, es decir de tener su ángulo "β" igual a 90º. Es por esta razón que todos disfrutan de la cualidad de arrojar sobre sus respectivas trazas verticales, la proyección vertical de cualquier elemento geométrico que pueda estar contenido en ellos, propiedad de la cual deriva el nombre de "proyectante vertical".

En el caso particular del plano que tratamos, el triángulo "PRS" contenido en él, nos muestra una proyección vertical rectilínea "$P^V R^V S^V$", confundida con la traza vertical "βV", como ocurre siempre que existe ortogonalidad entre un plano dado y un plano de proyección. La proyección horizontal "$P^h R^h S^h$", semeja la apariencia real del polígono <u>sin mostrar su Verdadero Tamaño.</u>

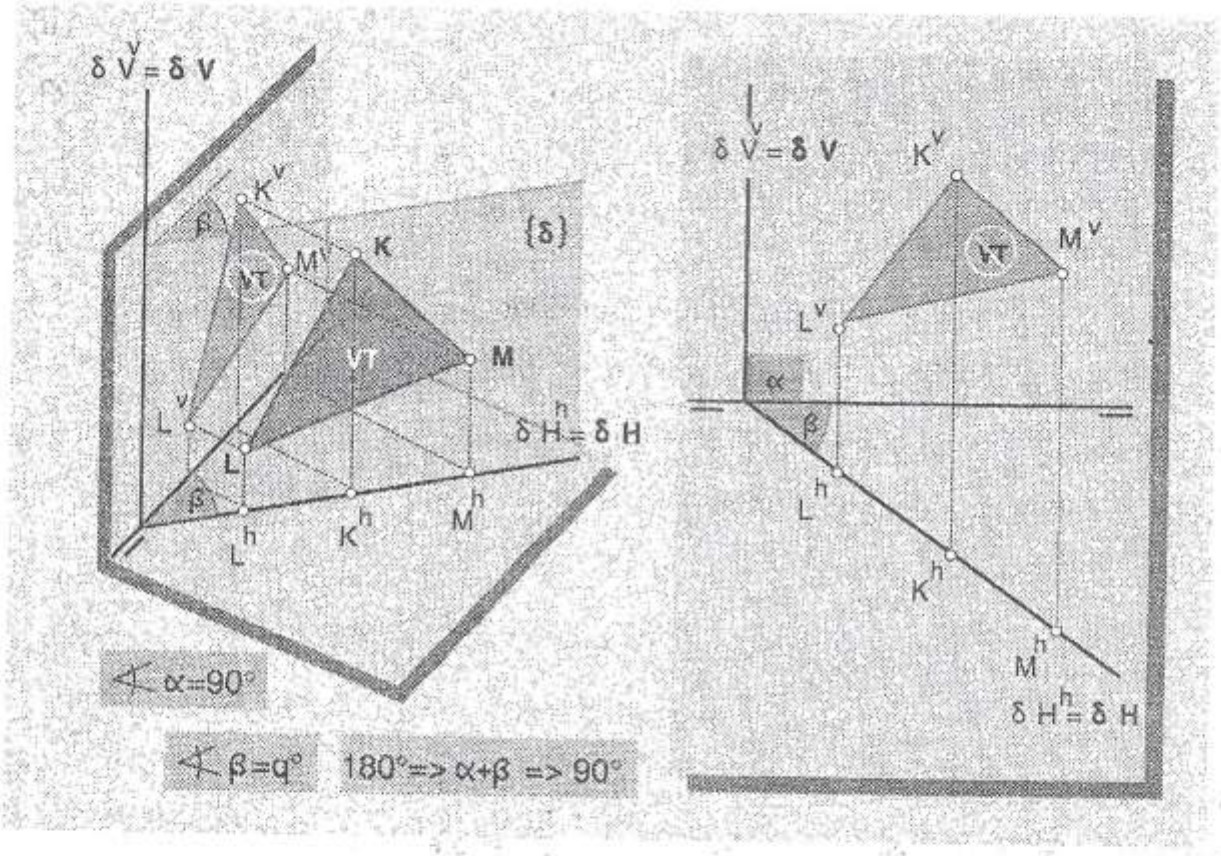
Por otra parte, como ocurre en cualquier plano donde el ángulo β sea 90º, la traza vertical siempre habrá de revelar, en el ángulo que forma con la Línea de Tierra, la magnitud real del otro, es decir, del ángulo "α" que el plano considerado forma con el PH. La traza horizontal "βH" se muestra por su parte, formando 90º con la Línea de Tierra, expresión evidente de la relación de perpendicularidad entre el Plano Proyectante Vertical y el Plano Vertical de Proyección.

PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL

Emulando la relación entre un Plano Horizontal y uno Frontal, el Plano Proyectante Horizontal satisface las mismas propiedades que el Proyectante Vertical, pero siempre en relación al otro plano de proyección.

De esta forma, un Plano como éste {δ} se distingue por ser perpendicular al Plano Horizontal de Proyección, de modo que la magnitud de su ángulo "α" es siempre 90°, condición que lo define.

Toda vez que el valor del ángulo "β" puede recorrer el entorno comprendido entre 0° y 90°, este plano —mientras respeta su condición esencial de ser perpendicular al PH— puede llegar a ser paralelo, oblícuo o perpendicular al PV.



No obstante, de la misma manera que acontece en el caso anterior, el nombre de "Proyectante Horizontal" se lo reserva aquel plano como el de la figura {δ} donde el

valor del ángulo β no llega a ser 0º ni 90º, puesto que en esos casos los planos se comportan respectivamente como FRONTAL y DE PERFIL.

Un Plano Proyectante Horizontal que, como el nuestro, contenga una figura como el triángulo KLM, muestra entonces la proyección horizontal del mismo (K^h L^h M^h), confuhdida con su propia traza horizontal (δH), mientras que la proyección vertical (K^v L^v M^v), aunque sugiere la forma del polígono, se muestra sin revelar su Verdadero Tamaño.

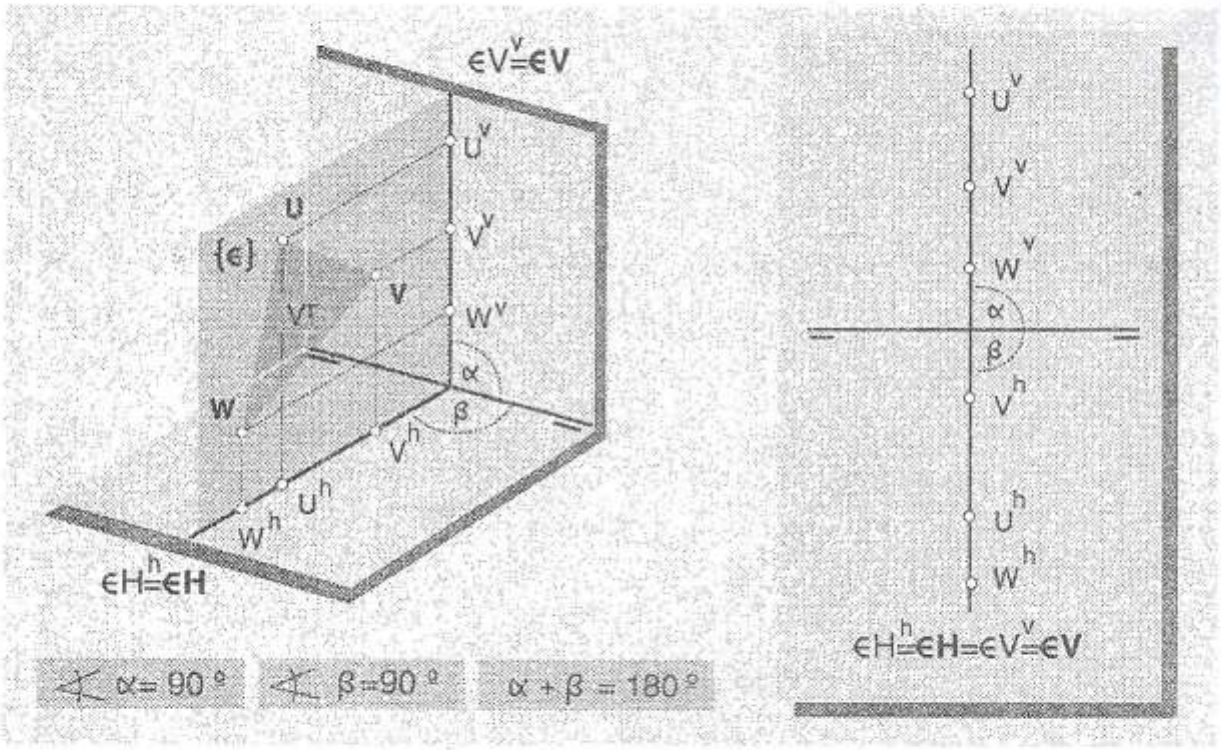
Es tambien notable en este caso, como el ángulo que forma la traza horizontal "δH" con la Línea de Tierra, es revelador de la magnitud real del ángulo "β" que el plano forma con el plano vertical de proyección. La traza vertical "δV", en un comportamiento parecido, revela definitivamente la relación de ortogonalidad existente entre el plano Proyectante Horizontal y el Plano Horizontal de Proyección, al mostrar en su ángulo con LT, la misma magnitud de α=90º.

PLANO DE PERFIL

El Plano de perfil conjuga en sí mismo la propiedad de los planos anteriores, de ser respectivamente perpendiculares al PV y al PH. Así, un plano como este se reconoce por ser perpendicular a ambos planos de proyección; en suma, por ser perpendicular (ortogonal) a la Línea de Tierra. De esta manera, las magnitudes de los ángulos α y β se igualan a 90º.

Debido a su posición, un plano de perfil {ϵ} como lo explica el gráfico, muestra sus trazas "ϵV" y "ϵH" en el espacio, formando 90 º entre sí y a su vez con LT, razón por la cual aparecen en DPO, confundidas en una misma línea perpendicular a LT. Por otra parte, debido a ello ambas trazas recogen sobre sí mismas las respectivas proyecciones vertical y horizontal (U^v V^v W^v y U^h V^h W^h) del triángulo **UVW** contenido en dicho plano.

Las magnitudes reales de los ángulos "α" y "β" aparecen precisamente reveladas en los ángulos que dichas trazas forman con LT.

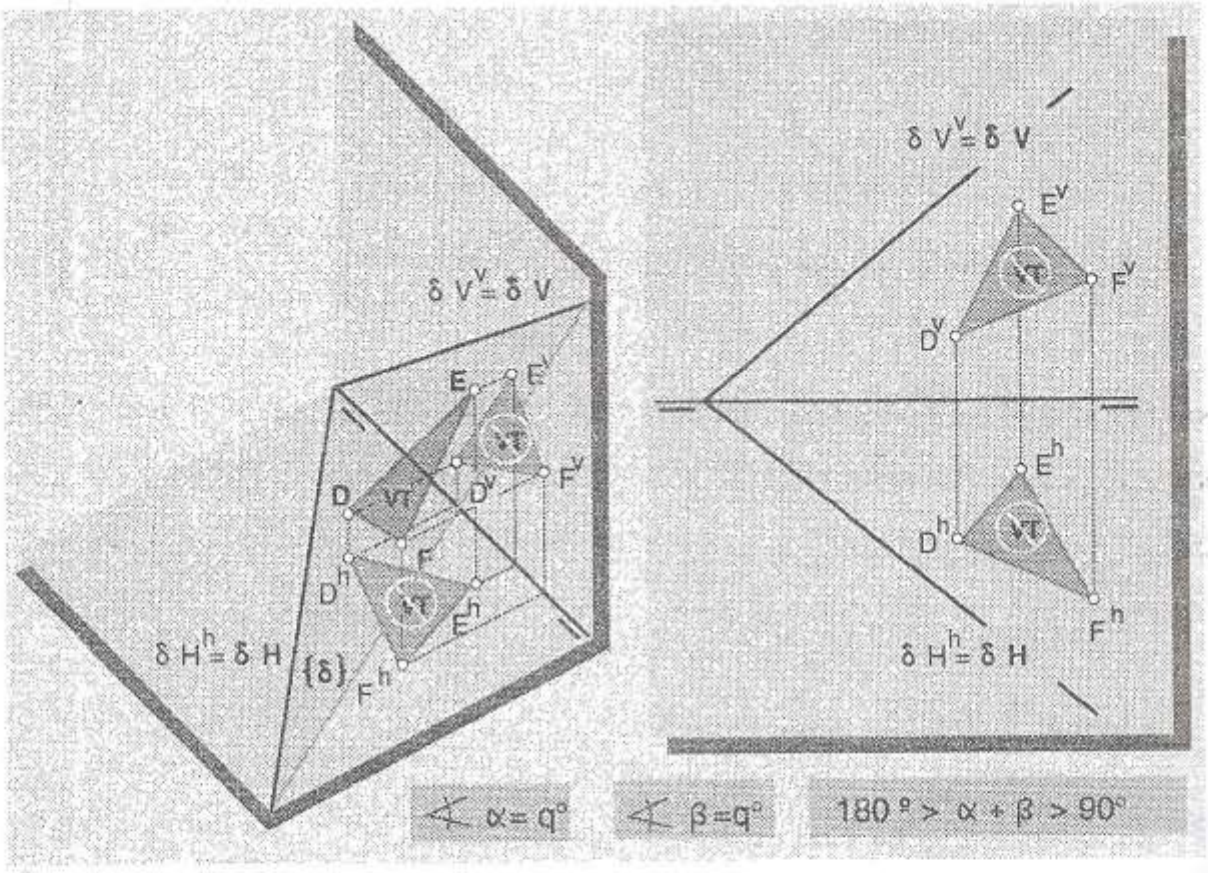


Observe cuidadosamente que la relación de perpendicularidad común a los tres planos que hemos descrito es responsable de la cualidad también común de producir proyecciones rectilíneas que se confunden precisamente con las trazas compartidas por el ángulo recto (v.g.: $A^v B^v C^v$ en el plano FRONTAL , $X^h Y^h Z^h$ en el plano HORIZONTAL, y $U^v V^v W^v$ y $U^h V^h W^h$ en el plano DE PERFIL).

PLANO CUALQUIERA

Un Plano Cualquiera es aquel cuya posición en el espacio no se somete a ninguna relación notable con los elementos referenciales de la DPO, es decir con los planos de proyección y la Línea de Tierra. De modo que podemos definirlo como un plano oblícuo con respecto a los planos de proyección y a la LT.

De hecho, las magnitudes de los ángulos "α" y "β" alcanzan valores cualesquiera, al tiempo que la posición del plano con respecto a LT es siempre oblícua. Por esta razón, en un plano de este tipo siempre debe cumplirse que la suma de sus ángulos con los planos de proyección satisfaga la relación $180° > \alpha + \beta > 90°$, expresión la cual da a entender que dicha suma oscila entre valores que nunca llegan a igualar alguna de las magnitudes notables que la limitan, puesto que si así llegase a ocurrir, el plano satisfaría las propiedades de alguno cualquiera de los seis planos restantes de la clasificación que hemos visto, dejando de ser CUALQUIERA.



En estas condiciones, un PLANO CUALQUIERA nunca muestra el Verdadero Tamaño de ninguna figura geométrica contenida en él, excepción hecha naturalmente, de las rectas características. Es obvio, además, que las magnitudes de los ángulos "α" y "β", no aparezcan evidenciadas en DPO.

Si hacemos una cuidadosa evaluación comparativa de los casos descritos, podemos enunciar las conclusiones siguientes:

1- Todo plano paralelo a un plano de proyección, es perpendicular al otro.

2- Todo plano paralelo a un plano de proyección, muestra —sobre ese plano— las proyecciones de los elementos que contiene en sus magnitudes reales.

3- Todo plano paralelo a un plano de proyección, carace de traza con dicho plano.

4- Todo plano paralelo a un plano de proyección, tiene su traza con el otro plano en posición paralela a la Línea de Tierra.

5- Todo plano perpendicular a un plano de proyección, es visto en esa proyección como una línea recta que se confunde con la traza correspondiente.

6- Todo plano perpendicular a un plano de proyección, puede ser paralelo, oblícuo o perpendicular al otro.

7- Todo plano perpendicular a un plano de proyección —con excepción del FRONTAL y el HORIZONTAL , tiene su traza con el otro plano, perpendicular a la Línea de Tierra.

8- Las trazas de todo plano que no sea PARALELO A LA LINEA DE TIERRA, siempre se cortan en un punto común sobre la misma.

9- Un plano que sea oblícuo con respecto a un plano de proyección, solo puede ser oblícuo o perpendicular al otro.

10- Solo aquellos planos que son perpendiculares al menos a uno de los planos de proyección, revelan en los ángulos que sus trazas forman con la Línea de Tierra,

las magnitudes reales de los ángulos que ellos mismos forman con los planos de proyección.

El cuadro siguiente,sintetiza las características asociadas a cada uno de los casos vistos. Así como el cuadro que mostramos en referencia a las rectas, en dirección horizontal identificamos las magnitudes de los ángulos α y β, la suma de los mismos y la proyección que nos muestra el Verdadero Tamaño.

POSICION	α	β	$\alpha+\beta$	VT
HORIZONTAL	**0°**	*90°*	*90°*	ph
FRONTAL	*90°*	**0°**	*90°*	pv
DE PERFIL	*90°*	*90°*	**180°**	–
PROYECTANTE VERTICAL	q	***90°***	q	–
PROYECTANTE HORIZONTAL	***90°***	q	q	–
PARALELO A LT	q	q	***90°***	–
CUALQUIERA	q	q	**90°< $\alpha+\beta$< 180°**	–

En dirección vertical, apreciamos en "**negritas**", la característica que define al plano en el espacio; y en "*itálicas* ", aquellas cualidades comunes a grupos de planos.

Observe por ejemplo como la condición $\alpha + \beta = 90°$, que define al plano PARALELO A LA LINEA DE TIERRA, afecta -aunque no define- al FRONTAL y al HORIZONTAL. Ello explica que uno de los comportamientos de estos últimos sea también semejante al del primero, es decir, paralelos a la Línea de Tierra. Del mismo modo, todos los planos en los que $\beta = 90°$, se comportan como PROYECTANTES VERTICALES; así como todos aquellos cuyo $\alpha = 90°$ se comportan como PROYECTANTES HORIZONTALES. En síntesis, si tratamos de agrupar los planos por propiedades comunes,

encontraremos que todos, a excepción del Paralelo a LT y el Cualquiera, comparten la cualidad de ser proyectantes puesto que en todos ellos, al menos uno de sus ángulos con los planos de proyección es recto. Los dos casos restantes, no se someten a ninguna condición común.

Descubrimos así que cuando varios planos comparten la condición que define a otro, aquellos adoptan tambien esta propiedad, aunque no les sea definitoria.

Todos los valores de $\alpha+\beta$, pueden ser englobados en la relación $90° <= \alpha+\beta <= 180°$, la cual es común a todos ellos y expresa, que la posibilidad de que un plano ocupe una posición particular con respecto a ambos planos de proyección, se cumple siempre que esta suma no exceda los valores anotados.

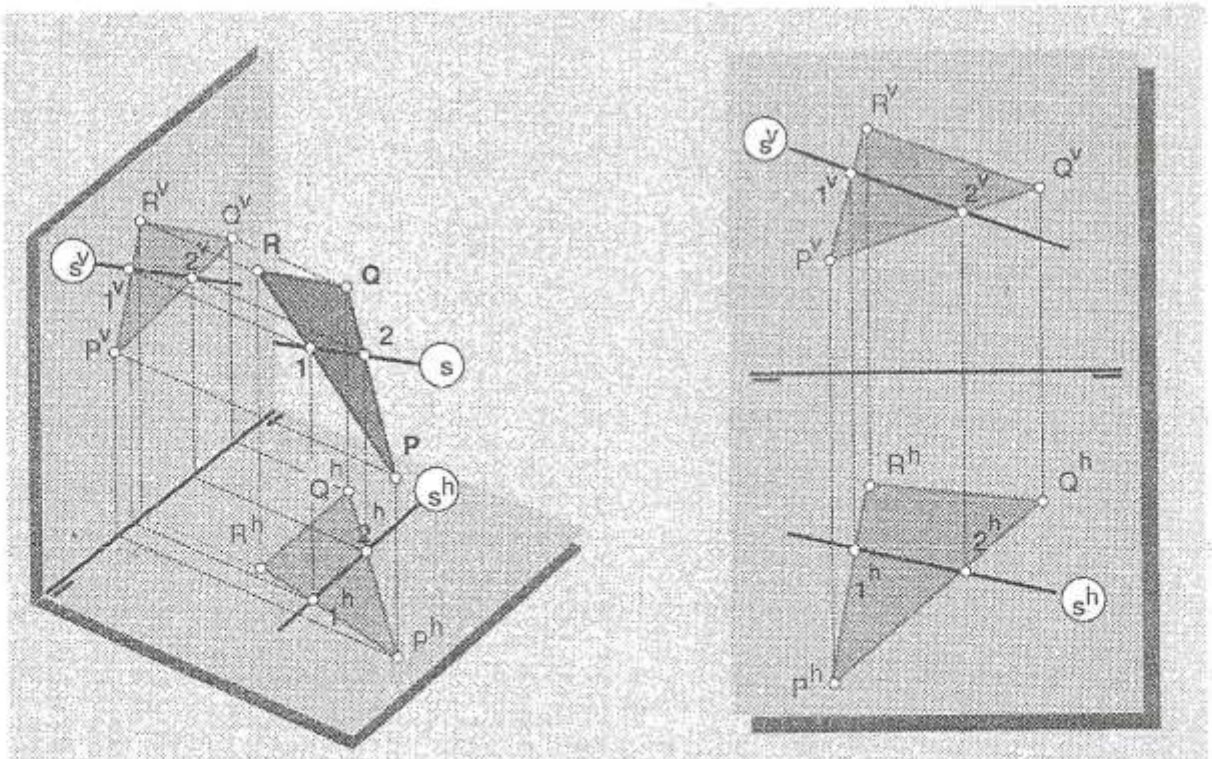
RECTAS Y PUNTOS CONTENIDOS EN EL PLANO

Un plano contiene en sí mismo un número infinito de rectas que se ubican en diversas direcciones. Si consideramos una sola recta "s" del plano, veremos que ella se corta con todas aquellas otras que no son paralelas a ella, de modo que las respectivas intersecciones (" 1 " y " 2 ") de nuestra recta con otras dos ("RP" y "PQ"), dará por resultado la configuración de un segmento "1-2" el cual expresa y determina la posición de la recta "s" en el espacio.

Así pues, si se conoce una sola proyección de una recta que pertenece a un plano totalmente determinado en DPO, establecer la proyección ausente resulta una simple operación de localización de puntos comunes en rectas del plano que son ya conocidas.

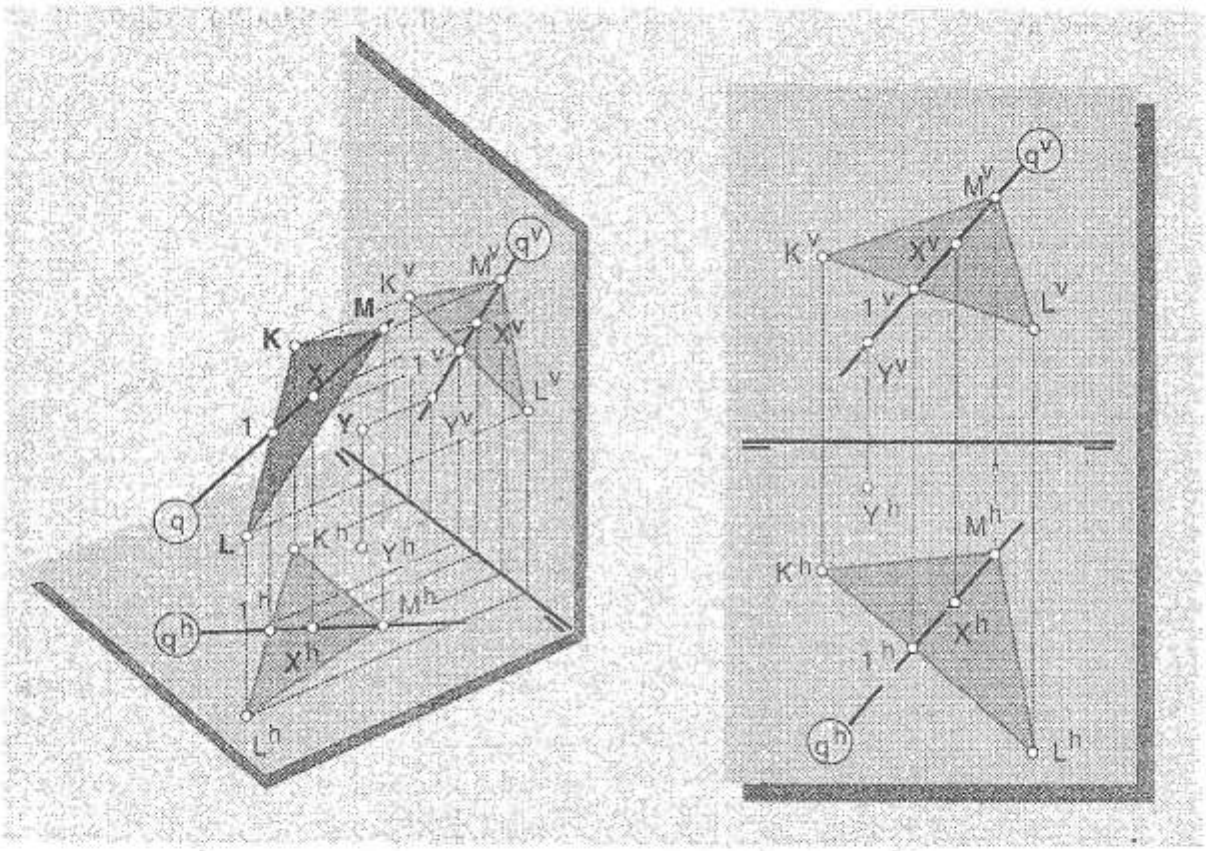
En cuanto a la ubicación de puntos contenidos en un plano como {KLM}, estos se localizan siempre sobre cualquier recta (q) del mismo, de modo que cuando

queremos determinar la proyección ausente (X^h) de uno de ellos, conocida la otra (X^v), simplemente hacemos pertenecer la proyección conocida a la proyección respectiva de una recta del plano (q^v), y localizando su proyección complementaria (q^h) podemos ubicar sobre ella la proyección buscada de dicho punto (X^h).



Si solo se conoce una sola proyección, digamos la vertical "sv" de una recta que pertenece a un plano "PQR" dado, para determinar su otra proyección, basta cortar la proyección conocida con las proyecciones respectivas de dos rectas del plano (Pv Rv y PvQv) y localizar los respectivos puntos de intersección (1v y 2v), los cuales, localizados por alineamiento (1h y 2h) sobre las rectas correspondientes (Ph Rh y PhQh) de la proyección horizontal, permiten localizar la proyección buscada (sh)

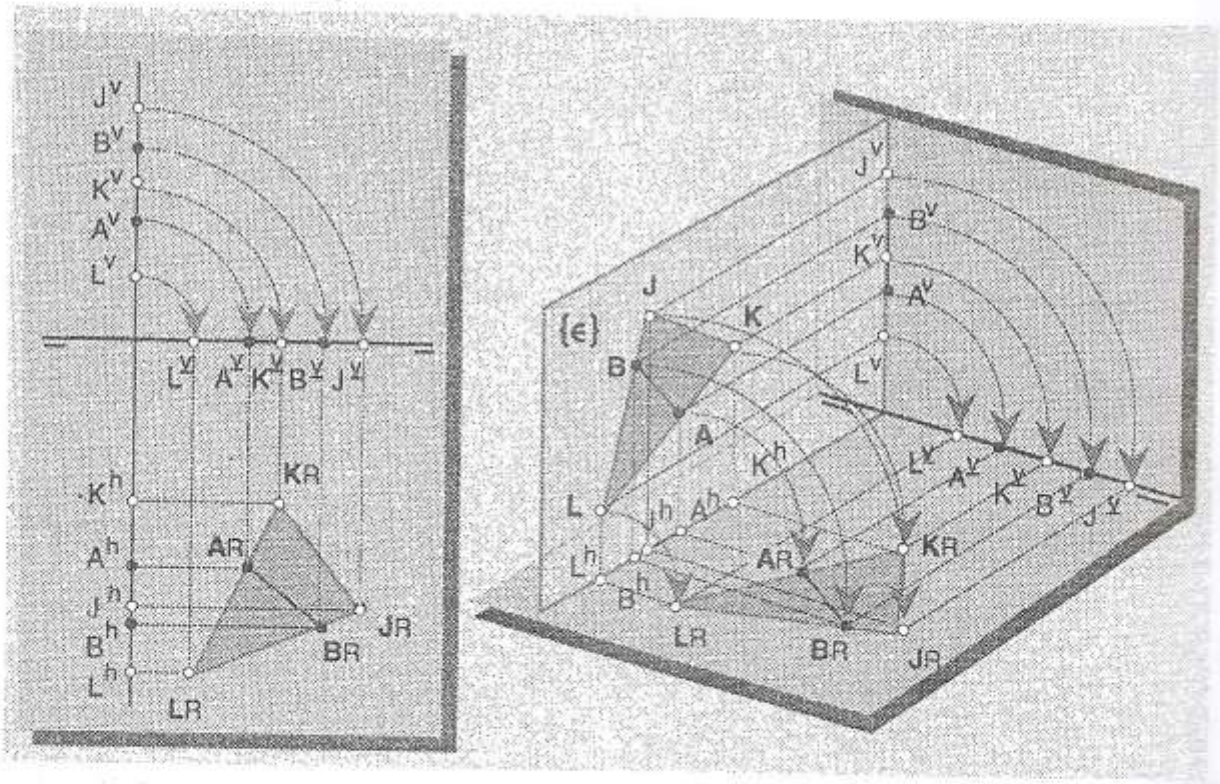
Igualmente, para verificar si un punto cualquiera (Y) cuyas dos proyecciones (Y^h-Y^v) son conocidas, pertenece a un plano también conocido {KLM}, es preciso ubicar una cualquiera de dichas proyecciones sobre una recta (q) del plano , y verificar si la otra proyección de dicho punto le pertenece o no. Ambas situaciones están ilustradas en las figuras siguientes.



El problema es distinto cuando el plano sobre el cual deseamos ubicar una proyección desconocida de una recta al cual pertence, es DE PERFIL. Como es de entender, toda vez que un plano De Perfil no revela las proyecciones de los elementos que contiene, mas que bajo la forma de una línea recta perpendicular a la Línea de Tierra, la ubicación de la proyección desconocida de una recta contenida en él acude, bien al cambio de planos o al rebatimiento, para obtener su resultado.

Sea por ejemplo el caso ilustrado en la figura de la página siguiente, donde conocemos la proyección vertical del segmento "AB", el cual pertenece al plano DE PERFIL {∈ (JKL) }, y del cual queremos determinar su proyección horizontal. Toda vez que un plano como este, es incapaz de brindarnos información en DPO acerca de la inserción exacta del segmento en el plano, es precisa una

información verbal complementaria a la que se nos ofrece en forma gráfica; por ejemplo, que "A" se apoya en "KL" y "B" en "JL". Si usted intenta resolver el problema sin esta información, seguramente arribará a mas de una solución.

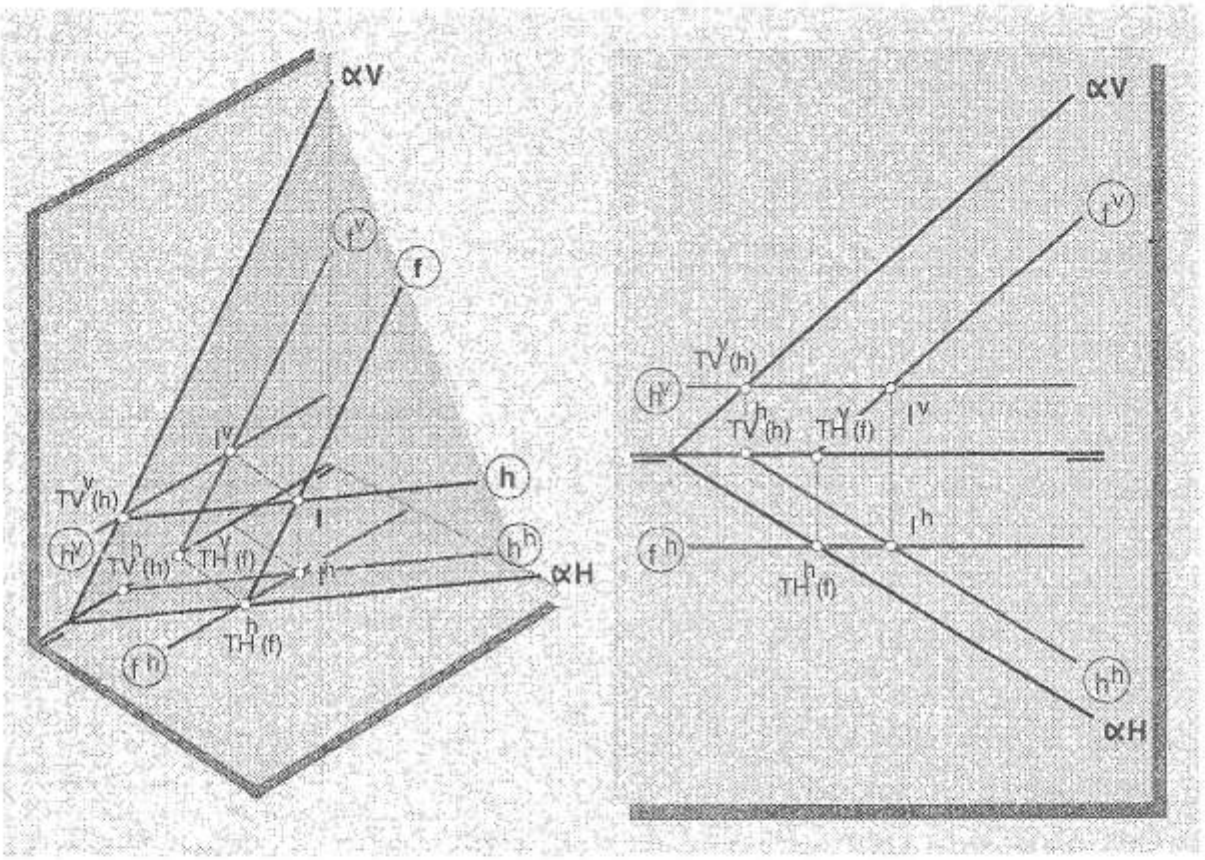


La única forma de encontrar la proyección buscada implica necesariamente visualizar la posición del segmento "AB" sobre el plano {ε}, por lo que convendrá llevar a dicho plano a una posición de Verdadero Tamaño, donde apreciemos efectivamente como se ubica el segmento"AB" sobre el plano {JKL}. El gráfico ilustra esta situación, donde se aplica el rebatimiento para reconocer la proyección ausente de "AB".

La aplicación del Cambio de Planos, que también nos permite llevar un elemento geométrico a una posición de Verdadero Tamaño puede sernos útil para este fín, como lo veremos oportunamente.

RECTAS CARACTERISTICAS DEL PLANO

Ya sabemos que, dependiendo de la posición en que un plano se encuentre en el espacio, podemos ubicar rectas que estando contenidas en él, ocupen diversas posiciones particulares, acordes con la denominación que hemos establecido . Así, en un plano CUALQUIERA pueden identificarse rectas en todas las posiciones, excepto DE PUNTA y DE PIE; en un plano PARALELO A LT solo encontramos rectas DE PERFIL y PARALELAS A LT; en un PROYECTANTE HORIZONTAL están ausentes las FRONTALES y las DE PUNTA, mientras en un PROYECTANTE VERTICAL lo están las HORIZONTALES y las DE PIE.



No obstante, exíste un conjunto infinito de ellas que ocupan posiciones notables[1] con respecto a los planos de proyección. Estas rectas, respectivamente paralelas a dichos planos se conocen como RECTAS CARACTERISTICAS. De ellas, las paralelas al Plano Vertical de Proyección son, en general, rectas Frontales; mientras que las paralelas al Horizontal se comportan, en general, como rectas Horizontales. Así, hablamos de las FRONTALES y de las HORIZONTALES del plano, para referirnos precisamente a sus rectas características, situación que nos ilustraba la figura anterior.

DETERMINACION DE LAS TRAZAS DEL PLANO MEDIANTE LAS RECTAS CARACTERISTICAS. La utilidad de las rectas características es especialmente relevante en la determinación de las trazas del plano, en virtud de la relación de paralelismo existente entre ellas, así como tambien en la ubicación de la posición de Verdadero Tamaño del plano, cuando se aplica el cambio de planos.

En las figuras ilustradas en la página siguiente, explicamos como la utilización de las rectas características, conduce a la determinación de las trazas de un plano como "QRS". Al trazar las rectas " f " y " h " pertenecientes a dicho plano, observamos como la FRONTAL nos permite conocer su propia traza horizontal "TH^h (f) = **TH**" , y como su proyección vertical define la misma dirección de la traza vertical "**αV**" del plano. Por ser ambas RECTAS FRONTALES del mismo plano, son paralelas entre sí .

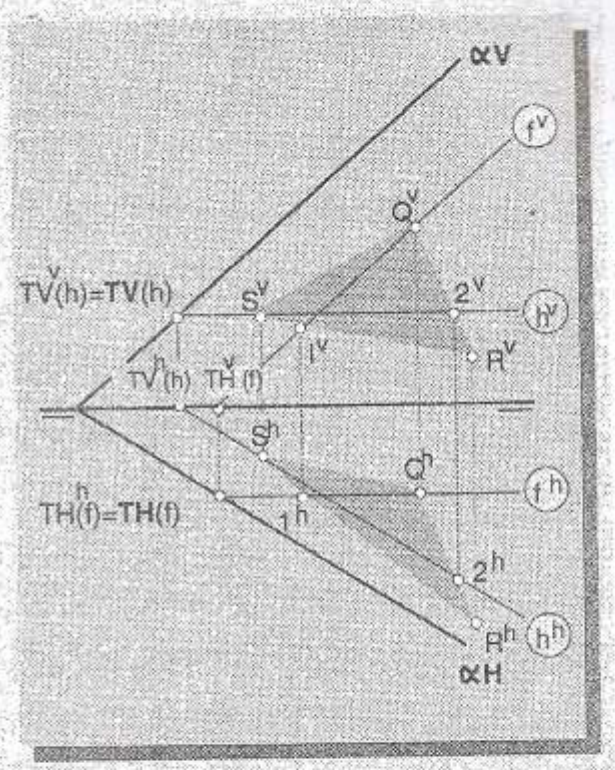
De modo análogo, la recta horizontal "h" nos ofrece su traza vertical "TV^v (f) =**TV**", al tiempo que nos indica en proyección horizontal, la dirección de la traza horizontal "**αH**" del plano, a la cual ella misma es paralela por ser ambas RECTAS HORIZONTALES.

---

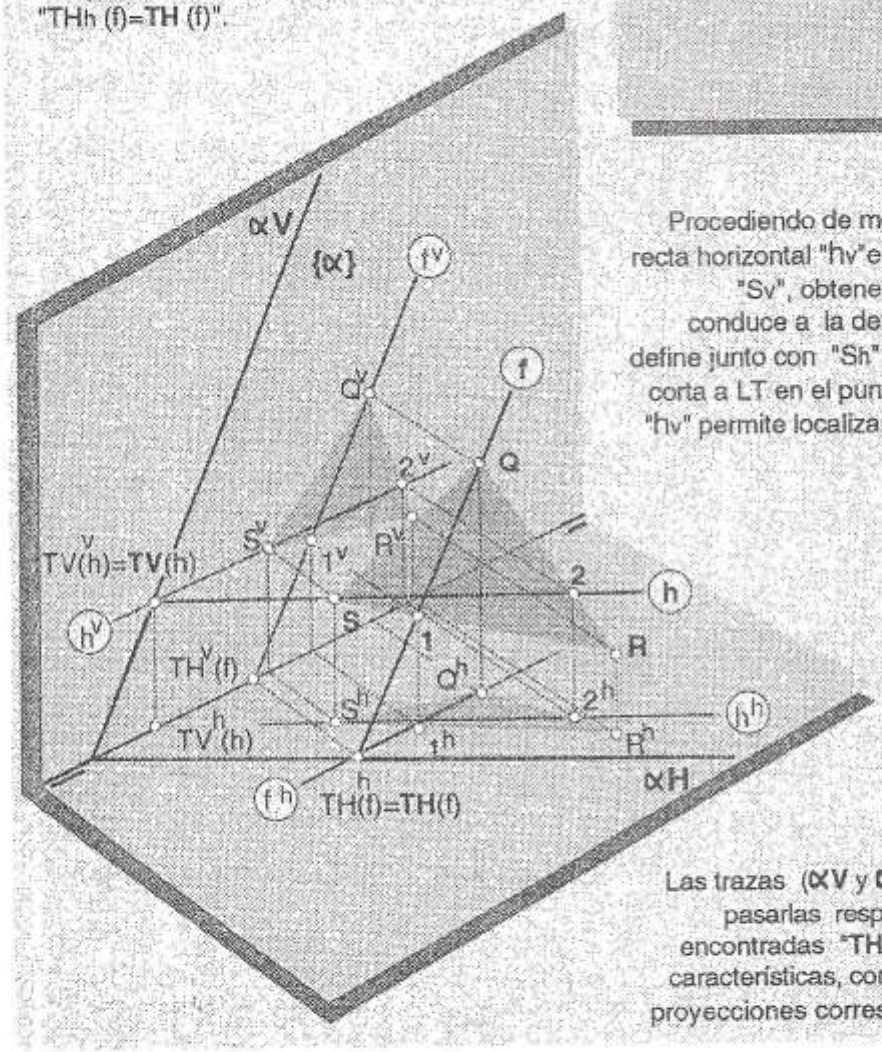
[1] Los elementos geométricos que ocupan POSICIONES NOTABLES con respecto a los planos de proyección se reconocen por mantener con dichos planos relaciones de PARALELISMO o bien de PERPENDICULARIDAD.

En el espacio, la recta "h", paralela al Plano Horizontal, pasa por el punto "S" y corta al segmento "QR" en el punto "2", mientras la recta "f",paralela alPlano Vertical, pasa por el punto "Q" y corta al segmento "RS" en el punto "1".

En la representación diédrica, se replican estas relaciones, de modo que la frontal "fh", se traza por la proyección horizontal "Qh" con una dirección paralela a LT , para obtener la proyección "1h ", que alineada con su complementaria "1v "en proyección vertical, nos permite hallar la proyección respectiva de dicha recta (fv), la cual corta a LT en el punto "THv (f)", que cortado mediante línea de referencia con su proyección horizontal "fh", nos permite hallar su propia traza horizontal "THh (f)=TH (f)".



Procediendo de modo semejante, al trazar la recta horizontal "hv"en la proyección vertical por "Sv", obtenemos el punto "2v", que nos conduce a la determinación de "2h", el cual define junto con "Sh" la proyección "hh", la cual corta a LT en el punto TVh(h) que subido hasta "hv" permite localizar su traza vertical "TV (h)".



Las trazas (αV y αH) del plano se definen al pasarlas respectivamente por las trazas encontradas "TH (f)" y "TV (h)"de las rectas características, con direcciones paralelas a las proyecciones correspondientes de las mismas.

La aplicación de este procedimiento es, en general, mucho mas expedito, al tiempo que permite ubicar rápidamente las trazas de un plano en aquellos casos en los cuales las proyecciones de sus rectas conocidas, por no tener puntos de corte evidentes con la Línea de Tierra dentro del area de dibujo, no favorecen la determinación directa de aquellas.

VERDADERO TAMAÑO Y CONSTRUCCION DE FIGURAS PLANAS.

Como hemos visto, solo cuando un plano es FRONTAL u HORIZONTAL, se muestra en posición de verdadero tamaño con respecto a alguno de los planos de proyección.

La necesidad de conocer la magnitud real de una figura geométrica contenida en planos que ocupen alguna otra posición en el espacio, o de determinar sus proyecciones ortogonales, obliga a la aplicación de procedimientos que permitan ver dicho plano en una posición de VERDADERO TAMAÑO, vale decir, paralela o confundida con alguno de los planos de proyección, tal como ocurre con los dos planos señalados.

Este problema puede ser efectivamente abordado mediante la aplicación del rebatimiento, y el cambio de planos, recursos que ya hemos estado utilizando, y de los que haremos un uso intensivo en los temas siguientes.

REBATIMIENTO

El REBATIMIENTO es un procedimiento que, como abrir y cerrar una puerta, consiste en girar un plano alrededor de una de sus rectas características para llevarlo —en un primer movimiento— a una posición FRONTAL u HORIZONTAL, (posición de Verdadero Tamaño) y luego devolverlo -en un segundo movimiento- a su posición original. El primer movimiento recibe el nombre de "abatimiento" [2] y su devolución

[2] En la actualidad, el uso indiferenciado de los términos "abatimiento" y "rebatimiento" para denominar este procedimiento, es común entre muchos autores. Ello se debe probablemente, a que en el ámbito de la Geometría Descriptiva, nunca se ha establecido una distinción semántica

a la posición de partida, adopta el mismo nombre del procedimiento, "rebatimiento".

Aún cuando el rebatimiento recurre al giro del plano sobre rectas características, la utilización del giro, como procedimiento que se apoya en rectas de pie o de punta, aún cuando puede ser aplicado para los fines señalados, debe descartarse por representar una via poco práctica en la manipulación de planos.

La recta tomada como eje de giro, recibe en este caso el nombre de EJE DE REBATIMIENTO o CHARNELA, y en todo caso ella actúa como una bisagra alrededor de la cual gira el plano objeto del rebatimiento. La charnela es siempre asumida por una recta FRONTAL o por una HORIZONTAL, aunque por regla general, el rebatimiento se lleva a cabo con preferencia alrededor de una de las trazas del plano, para aprovechar las ventajas que ofrece confundir al plano móvil con alguno de los planos de proyección.

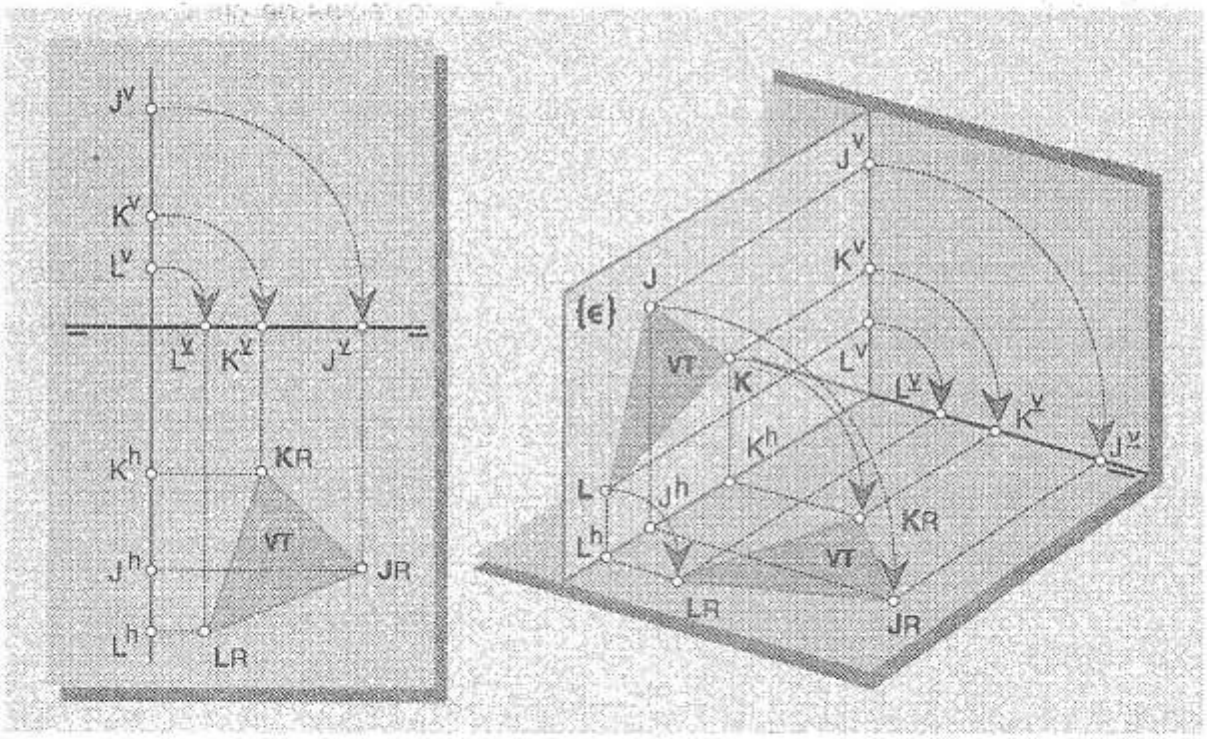
Rebatimiento de un plano De Perfil

Entendido pues como un giro, lo estudiaremos inicialmente en su aplicación mas elemental, a un PLANO DE PERFIL. Sea por ejemplo el plano {ϵ}, el cual contiene a la figura "JKL ", de la cual queremos conocer su Verdadero Tamaño.

Observemos, en la figura espacial de la página siguiente, que al asumir como charnela a su traza horizontal "ϵH", el plano puede girar alrededor de ella y abatirse sobre el plano horizontal de proyección hasta confundirse con él para mostrarnos la figura "$J_R K_R L_R$" en Verdadero Tamaño. Este movimiento del plano en el espacio se refleja en el desplazamiento de los puntos del triángulo

entre ambos vocablos que hasta hoy, han compartido una misma connotación. Sin embargo, es obvio que siendo ambos, desde un punto de vista etimológico, términos de distinta estructura radical, sus significados han de ser diferentes y deben denotar eventos distintos. Ahora bien, toda vez que cuando aplicamos este procedimiento nos encontramos muchas veces sin el término adecuado para denominar los pasos que lo conforman, nosotros zanjaremos esta diferenciación adoptando de ahora en adelante, el vocablo"abatimiento" para denominar al primer paso del proceso y "rebatimiento" al segundo.

"JKL", según trayectorias frontales de arcos de circunferencia cuyos centros respectivos se ubican en "J^h, K^h y L^h", y cuyos radios correspondientes son J-J^h, K-K^h y L-L^h.



De la misma manera que ocurre en la representación espacial, la representación diédrica nos muestra en proyección vertical, estas trayectorias -que por ser frontales- quedan expresadas en sus magnitudes reales en el desplazamiento de las proyecciones verticales J^v, K^v y L^v hasta las posiciones $J^{\underline{v}}$, $K^{\underline{v}}$ y $L^{\underline{v}}$ sobre la Línea de Tierra. En consonancia con su posición frontal, las proyecciones horizontales de estas trayectorias quedan expresadas por líneas rectas paralelas a la Línea de Tierra, las cuales llevan a los puntos J^h, K^h y L^h hasta las posiciones $J^{\underline{h}}$, $K^{\underline{h}}$ y $L^{\underline{h}}$, que coinciden respectivamente con J_R, K_R y L_R, donde el triángulo "JKL" se muestra en Verdadero Tamaño.

Naturalmente, de haber escogido como charnela a la traza vertical "**ϵV**", el abatimiento del plano {ϵ} sobre el plano vertical de proyección, habría dado lugar a

trayectorias horizontales, expresadas consecuentemente en DPO, por lo cual la figura rebatida habría aparecido confundida con el plano vertical.

Rebatimiento de un plano Cualquiera

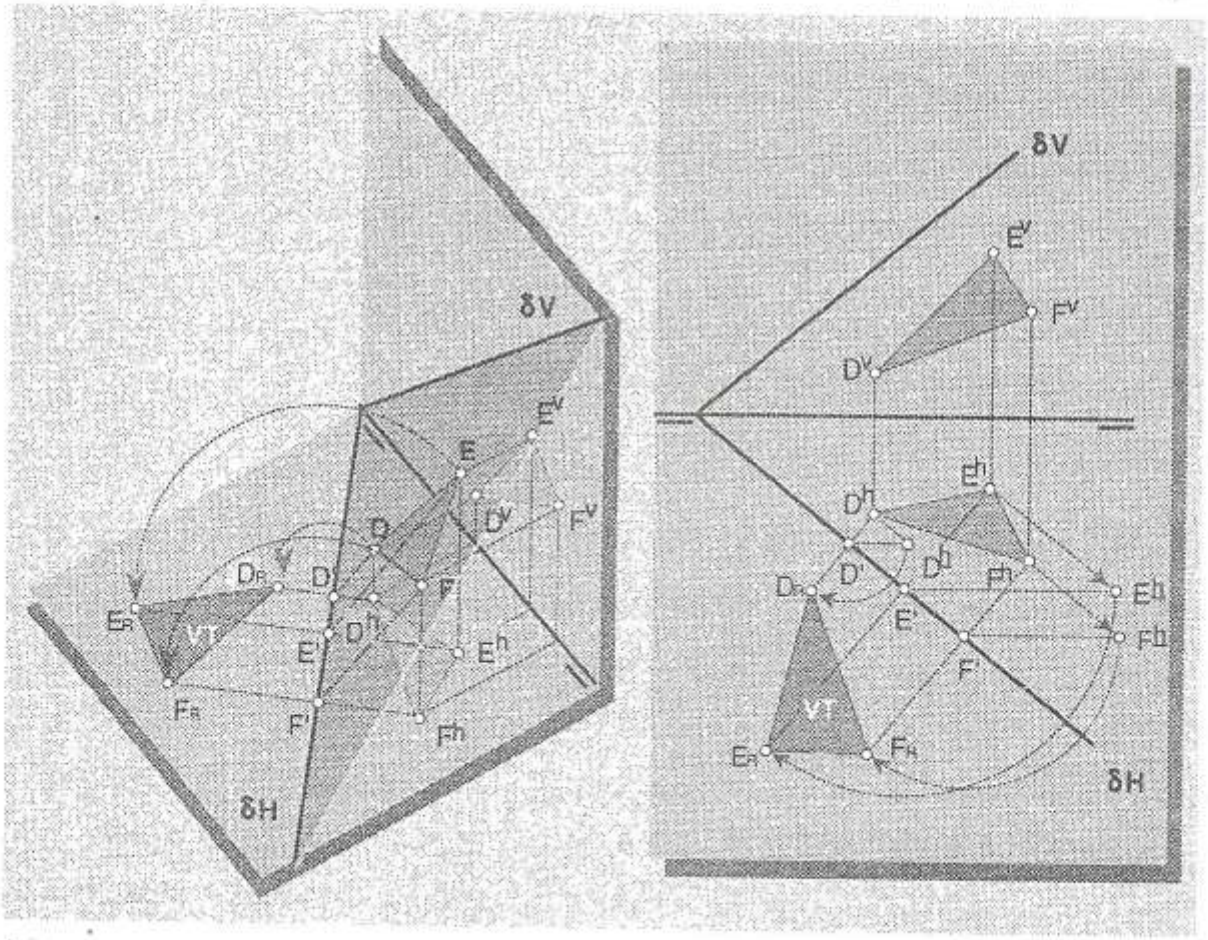
De la observación cuidadosa del ejemplo anterior, salta a la vista que las trayectorias descritas por los puntos del plano cuando este es abatido, constituyen figuras geométricas planas -arcos de circunferencia- las cuales, como es evidente, sugieren la existencia de planos que las contienen respectivamente ("JJ^hJ_R", "KK^hK_R" y "LL^hL_R").

Estos planos —sin importar la posición del que se abate— son siempre perpendiculares a la charnela, razón por la cual, en aquel caso, aparecen en posición FRONTAL.

Ahora bien, sabemos que las trazas de un plano cualquiera, forman ángulos cualesquiera con la Línea de Tierra. De modo que si pensamos en un plano cualquiera {δ}, como el de la figura siguiente, el cual se abate alrededor de su traza horizontal (δH), las posiciones respectivas de los planos que contienen las trayectorias de los puntos D, E y F, ya no serán frontales, sino PROYECTANTES HORIZONTALES, tal como lo muestran los tres planos respectivamente definidos por los puntos "$D\ D'\ D_R$", "$E\ E'\ E_R$" y "$F\ F'\ F_R$", los cuales no son mas que los triángulos de rebatimiento de las proyecciones horizontales de los respectivos segmentos de Rectas de Máxima Pendiente (DD', EE' y FF') comprendidos entre los puntos considerados y la charnela.

Desde luego, a diferencia del caso anterior, estas trayectorias no pueden ser representadas en proyección vertical en su magnitud real, lo cual nos obliga a interpretar el procedimiento a aplicar en este caso, a partir de nuevos elementos.

Desde un punto de vista puramente constructivo, lo que hacemos es trazar por la proyección de un punto cualquiera del plano, una paralela y una perpendicular a la charnela.



La recta paralela a la charnela, siendo a su vez perpendicular a la proyección del segmento de recta de Máxima Pendiente o Inclinación comprendido entre el punto y la charnela, recibe respectivamente la diferencia de cota o vuelo con respecto a la charnela del punto correspondiente, que en realidad son los valores absolutos de dichas magnitudes, ya que en proyección se miden con respecto a la Línea de Tierra.

Por otra parte, la perpendicular a la charnela, además de representar la proyección correspondiente de la trayectoria del punto considerado cuando el plano es abatido, recoge la proyección respectiva del segmento en cuestión. La unión mediante un trazo rectilíneo del extremo de la diferencia de cota o vuelo, con el punto de corte de la perpendicular y la charnela, permite encontrar entre dichos puntos, la magnitud real del segmento, es decir, el Verdadero Tamaño de la distancia entre el punto y la charnela, que trasladada directamente a la perpendicular mediante un arco con centro en su intersección con la charnela, nos permite localizar allí al punto rebatido.

En la figura espacial de la página anterior, notamos que DD', EE' y FF', representan los segmentos de rectas de Máxima Pendiente del plano {δ} comprendidos respectivamente entre los puntos D, E y F, y la charnela "δH". Cuando el plano es abatido, las trayectorias descritas por los puntos D, E y F, tienen a dichos segmentos como radios de giro, de tal manera que cuando el plano {δ} alcanza a confundirse con el plano horizontal de proyección, cada uno de dichos puntos ocupa las posiciones D_R, E_R y F_R, las cuales conservan la misma distancia que D, E y F a la charnela.

Así mismo, en ella tambien percibimos que cada uno de esos segmentos es, a su vez, hipotenusa de los triángulos de rebatimiento de las respectivas proyecciones horizontales D^hD', E^hE' y F^hF', de modo que los catetos DD^h, EE^h y FF^h representan sus correspondientes diferencias de cota, las cuales son, naturalmente, perpendiculares a las respectivas proyecciones horizontales.

Al observar la imagen diédrica verificamos estas mismas relaciones, de modo que nos es posible reconstruir dichos triángulos de rebatimiento al llevar sobre las

respectivas paralelas a la charnela por las proyecciones horizontales de dichos puntos, las diferencias de cota correspondientes ($LT-D^V=D^hD^{\underline{h}}$, $LT-E^V=E^hE^{\underline{h}}$, $LT-F^V=F^hF^{\underline{h}}$). Los triángulos de rebatimiento así construídos, nos muestran en sus respectivas hipotenusas las magnitudes reales de esos radios de giro ($D^{\underline{h}}D'$, $E^{\underline{h}}E'$ y $F^{\underline{h}}F'$), que definitivamente, nos permitirán ubicar a los puntos rebatidos D_R, E_R y F_R, y descubrir el Verdadero Tamaño del triángulo que ellos determinan. Vemos pues que para rebatir cualquier plano, una vez escogida la charnela, se construyen triángulos de rebatimiento para las proyecciones correspondientes de los segmentos de recta de maxima pendiente o máxima inclinación comprendidos entre los puntos escogidos del plano y la charnela.

El rebatimiento es un procedimiento cuya aplicación se reserva exclusivamente a los planos y en consecuencia afecta solo a los elementos geométricos contenidos en él. No pueden rebatirse un punto o una recta, a menos que formen parte de un plano, así como tampoco pueden rebatirse, como veremos mas adelante, volúmenes apoyados en él.

HOMOLOGIA

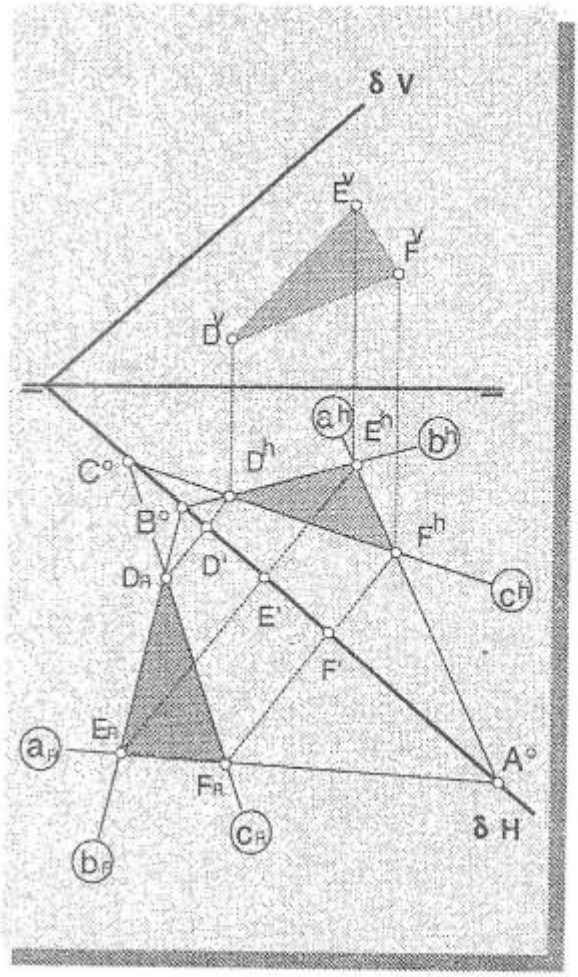
En geometría plana, la HOMOLOGIA, es la relación de correspondencia existente entre dos figuras geométricas con respecto a una línea recta llamada eje de homología. Esta relación, se verifica en DPO -como podemos apreciar en la figura- entre la imagen del triángulo en proyección horizontal "Dh Eh Fh" y su imagen rebatida "D_R E_R F_R" con respecto a la charnela, eje de homología mediante el cual, los puntos correspondientes (homólogos), se relacionan a través de rectas perpendiculares, que replican las proyecciones horizontales de sus trayectorias cuando el plano es rebatido sobre el plano horizontal de proyección. Se dice entonces que las dos figuras son homólogas respecto a la recta "**δV**".

De esta relación deriva a su vez, una relación de proporcionalidad entre las distancias a la charnela, desde los respectivos puntos en proyección y rebatidos de las figuras homólogas, la cual se expresa en la igualdad "$D^h D' / D_R D' = E^h E' / E_R E' = F^h F' / F_R F'$".

La manifestación gráfica de esta relación se evidencia en la posición de las rectas homólogas "a^h" y "a_R", "b^h" y "b_R", y "c^h" y "c_R", todas las cuales se cortan respectivamente en los puntos comunes A°, B° y C°, contenidos siempre sobre el eje de homología.

Toda vez que la charnela actúa como un elemento intermedio entre las figuras homólogas, todos los puntos comunes a rectas homólogas contenidos en ella, disfrutan tanto de las propiedades de los puntos en proyección como de las de los rebatidos. De allí que en el ámbito de la homología, la charnela sea también denominada "eje muerto".

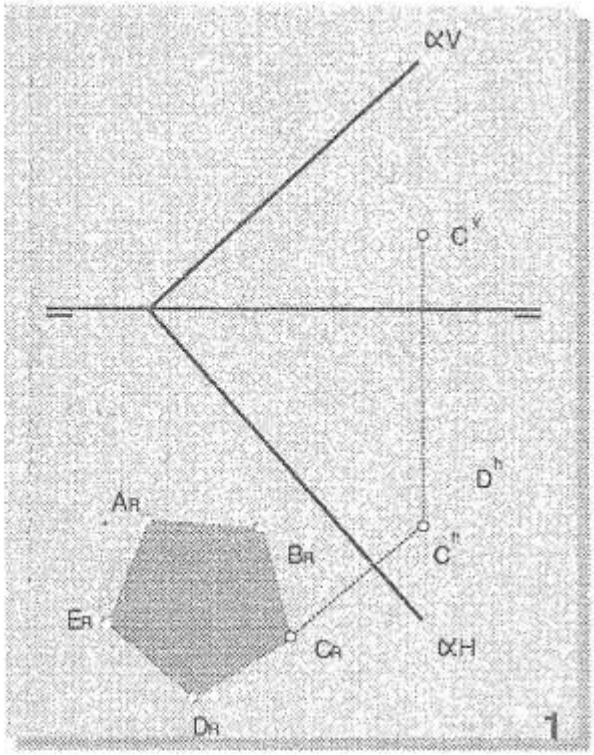
Invariablemente, la aplicación de este recurso requiere conocer al menos las posiciones homólogas de un punto (A^h y A_R) y la de una recta que contenga a uno de ellos.

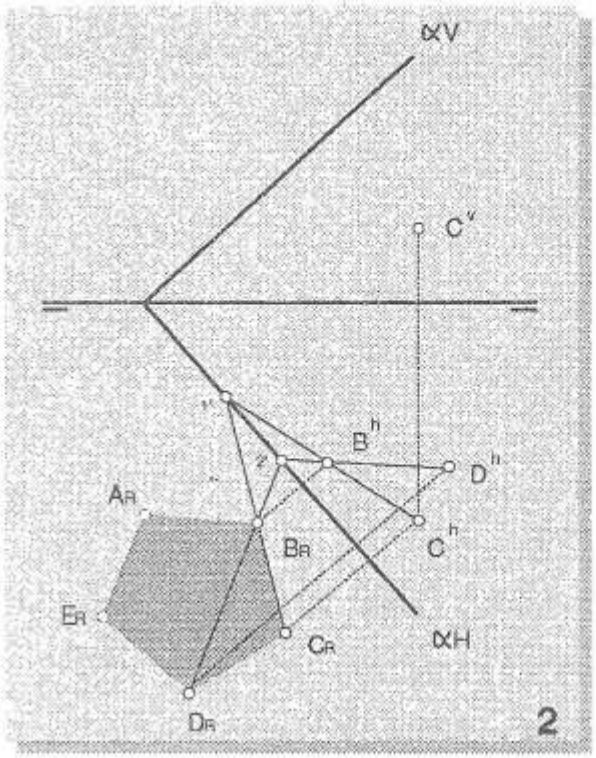


Sea por ejemplo, determinar las proyecciónes del Pentágono "ABCDE" cuya posición en Verdadero Tamaño

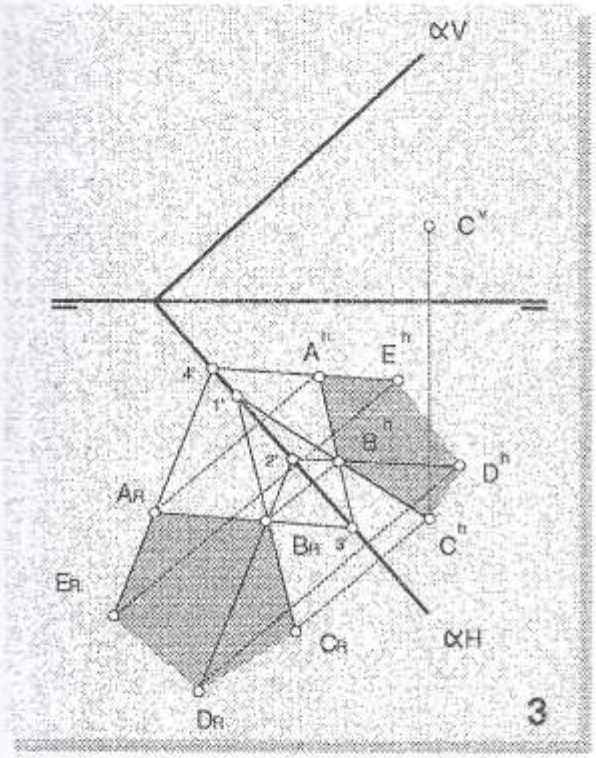
"A_R B_R C_R D_R E_R", ya esta determinada, conocida también la proyección horizontal "C^h" del vértice "C", tal como lo muestra la figura 1 en esta misma página.

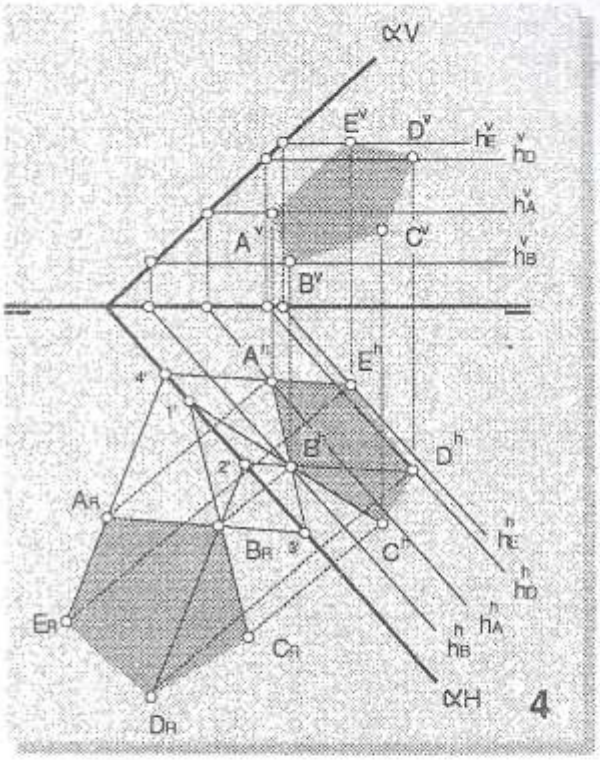
La unión de C_R con B_R, extendida hasta su punto de corte 1' con el eje de homología, permite la construcción de la recta homóloga "1' C^h", sobre la cual, como lo evidencia la figura 2, es posible localizar al punto "B^h". La prosecución de esta misma dinámica constructiva nos lleva a definir la recta "D_R B_R" la cual, al extenderse hasta el punto 2' sobre la charnela nos conduce a su recta homóloga "D^h B^h".





El proceso, como lo muestra la figura 3, en la página siguiente, prosigue de modo análogo para establecer las posiciones de los puntos restantes "A^h" y "E^h", los cuales, unidos sucesivamente, nos permiten representar la proyección horizontal "A^h B^h C^h D^h E^h" del Pentágono buscado.





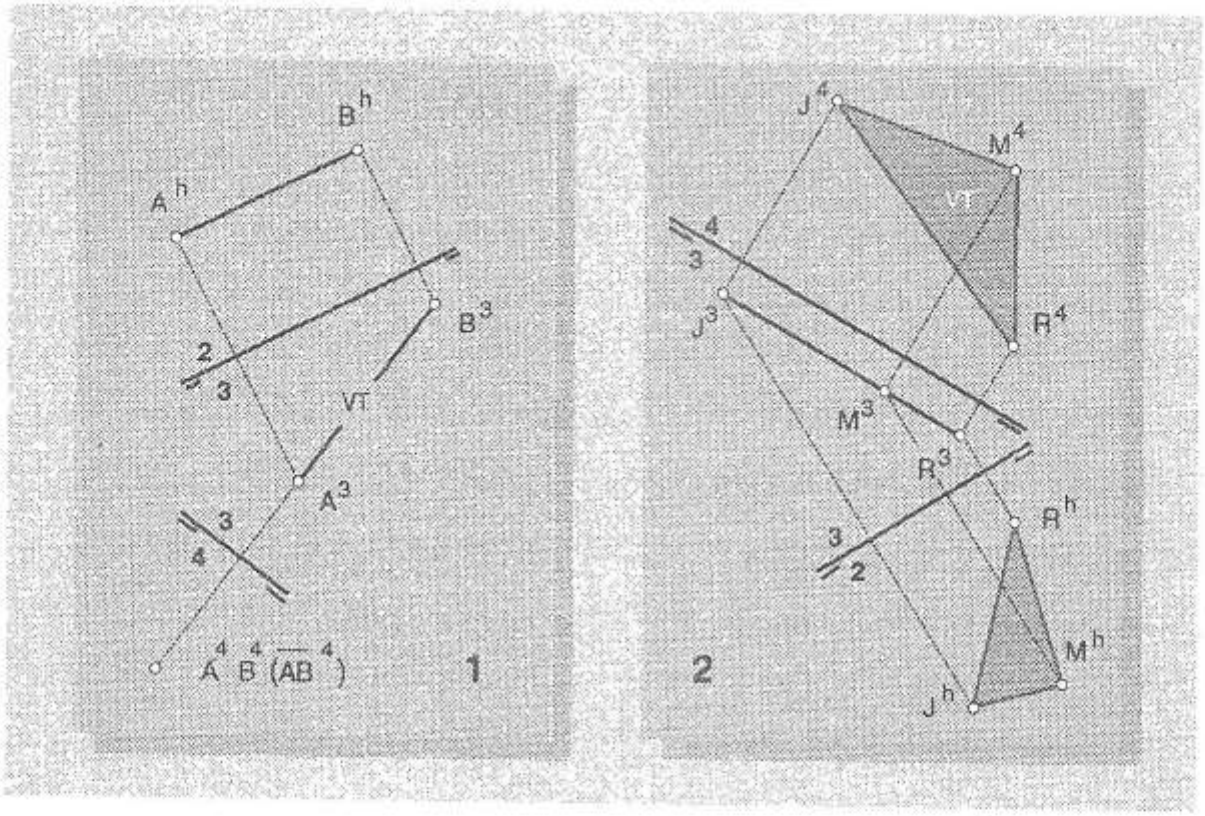
Note que para determinar la proyección horizontal del punto "D", se prefirió escoger la recta auxiliar "$D_R B_R$", en lugar de "$D_R C_R$" que ya es conocida, puesto que la agudeza del ángulo de incidencia de esta última con las lineas de referencia, habría hecho muy imprecisa la ubicación exacta del punto buscado.

La determinación de la proyección vertical "$A^V B^V C^V D^V E^V$" del polígono, se lleva a cabo mediante los procedimientos acostumbrados; en este caso —como lo revela la figura 4— haciendo pertenecer respectivamente las proyecciones de los vértices buscados a rectas horizontales h_A, h_B, h_D y h_E.

CAMBIO DE PLANOS

La utilidad del Cambio de Planos en su aplicación a la construcción de polígonos se fundamenta en su capacidad de permitir reproducir en cualquier posición los objetos que se encuentran en el espacio; en este caso particular, reproducir figuras planas en verdadero tamaño.

Cuando estudiamos, en un capítulo anterior, la aplicación del Cambio de Planos al manejo de la recta, hicimos un ejercicio donde pudimos constatar que es posible reproducir las diversas posiciones particulares de la recta en una secuencia de imágenes distintas, donde cada proyección se correlaciona con las adyacentes, en una cadena que puede hacerse virtualmente infinita. De la comparación de estas imágenes, descubrimos que invariablemente se presentan sólo en la forma de una de tres posibles proyecciones típicas [3]: 1- UN PUNTO, 2- UN SEGMENTO EN VERDADERO TAMAÑO y 3- UN SEGMENTO QUE NO ESTA EN VERDADERO TAMAÑO, tal como lo muestran respectivamente las proyecciones 4, 3 y 2 del segmento "AB" en la figura 1 de esta misma página.



3

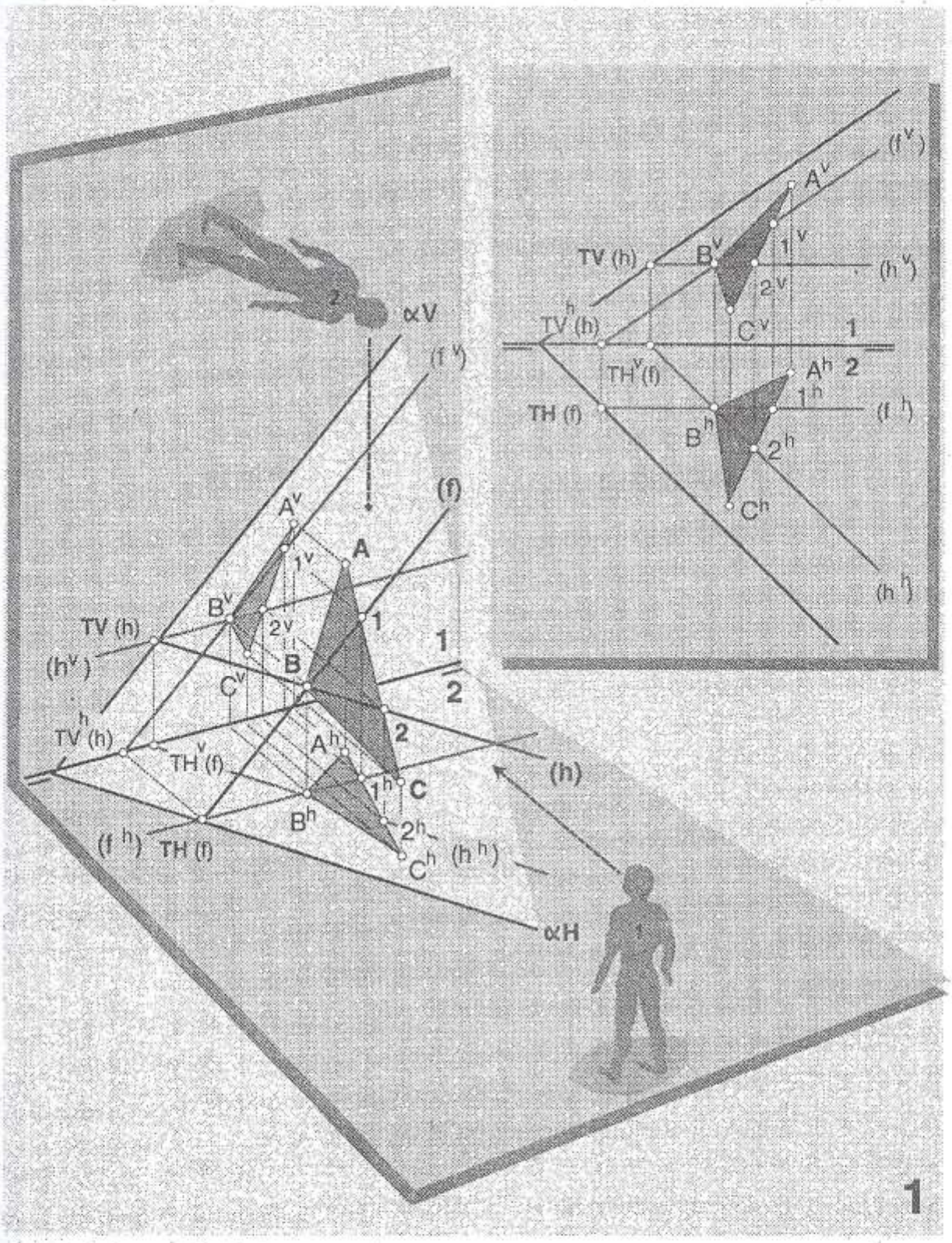
1. UN PUNTO (cuando la recta es perpendicular al plano de proyección. v.g.: la proyección horizontal de una recta DE PIE y la proyección vertical de una DE PUNTA),
2. UN SEGMENTO EN VT (cuando la recta es paralela al plano de proyección v.g.: la proyección horizontal de una recta HORIZONTAL y la proyección vertical de una FRONTAL)
3. UN SEGMENTO QUE NO ESTA EN VT (cuando la recta es oblícua al plano de proyección v.g.: las proyecciones horizontales de las rectas CUALQUIERA, DE PERFIL y FRONTAL, y las proyecciones verticales de las rectas CUALQUIERA, DE PERFIL y HORIZONTAL).

De un modo semejante, debido a que las posiciones que un plano puede ocupar con respecto a otro, se limitan tambien a tres, el manejo de este elemento geométrico a través del Cambio de Planos, implica tambien en forma invariable, la manipulación de tres proyecciones típicas [4] del mismo: 1- UNA RECTA, 2- UNA IMAGEN EN VERDADERO TAMAÑO y 3- UNA IMAGEN QUE NO ESTA EN VERDADERO TAMAÑO, como lo ilustran respectivamente las proyecciones 3, 4 y 2 del triángulo "JMR" en la figura 2, en la página anterior.

Toda vez que, como hemos venido insistiendo reiteradamente, la imagen reproducida en proyección es siempre una representación gráfica de lo que percibimos de un objeto cuando lo vemos en una dirección perpendicular al plano que acoge dicha imagen, podemos -como observadores- imaginarnos que ocupamos nuestras posiciones principales de observación simultáneas 1 y 2, para percibir un triángulo ABC en posición CUALQUIERA, tal como nos lo indica la figura 1 en la página siguiente.

La figura 1, en la página siguiente, nos ofrece las representaciones espacial y diédrica de dicho triángulo, referidas a un sistema inicial de proyección "LT 1/2", el sistema principal, el cual acoge en los planos de proyección las imágenes respectivas del polígono las cuales, debido a la posición que él ocupa con respecto a ellos, no aparecen en Verdadero Tamaño.

4
1- UNA LINEA RECTA (cuando el plano es perpendicular al plano de proyección v.g.: las proyecciones horizontales de los planos DE PERFIL, FRONTAL y PROYECTANTE HORIZONTAL, y las proyecciónes verticales de los DE PERFIL, HORIZONTAL y PROYECTANTE VERTICAL)
2- UNA IMAGEN EN VT (cuando el plano es paralelo al plano de proyección v.g.: la proyeccion horizontal del plano HORIZONTAL y la proyeccion vertical del FRONTAL)
3- UNA IMAGEN QUE NO ESTA EN VT (cuando el plano es oblícuo al plano de proyección v.g.: las proyecciones horizontales de los planos CUALQUIERA, PARALELO A LT y PROYECTANTE VERTICAL, y las proyecciónes verticales de los CUALQUIERA, PARALELO A LT y PROYECTANTE HORIZONTAL).


αV
(f v)
(f)
A v
A
1 v
B v
2 v
1
TV (h)
(h v)
B
C v
1
2
TV h (h)
TH v (f)
A h
2
(h)
1 h
C
B h
2 h
(f h)
TH (f)
C h
(h h)
αH
(f v)
A v
1 v
TV (h)
B v
(h v)
2 v
TV h (h)
C v
1
TH v (f)
A h
2
1 h
TH (f)
(f h)
B h
2 h
C h
(h h)
1

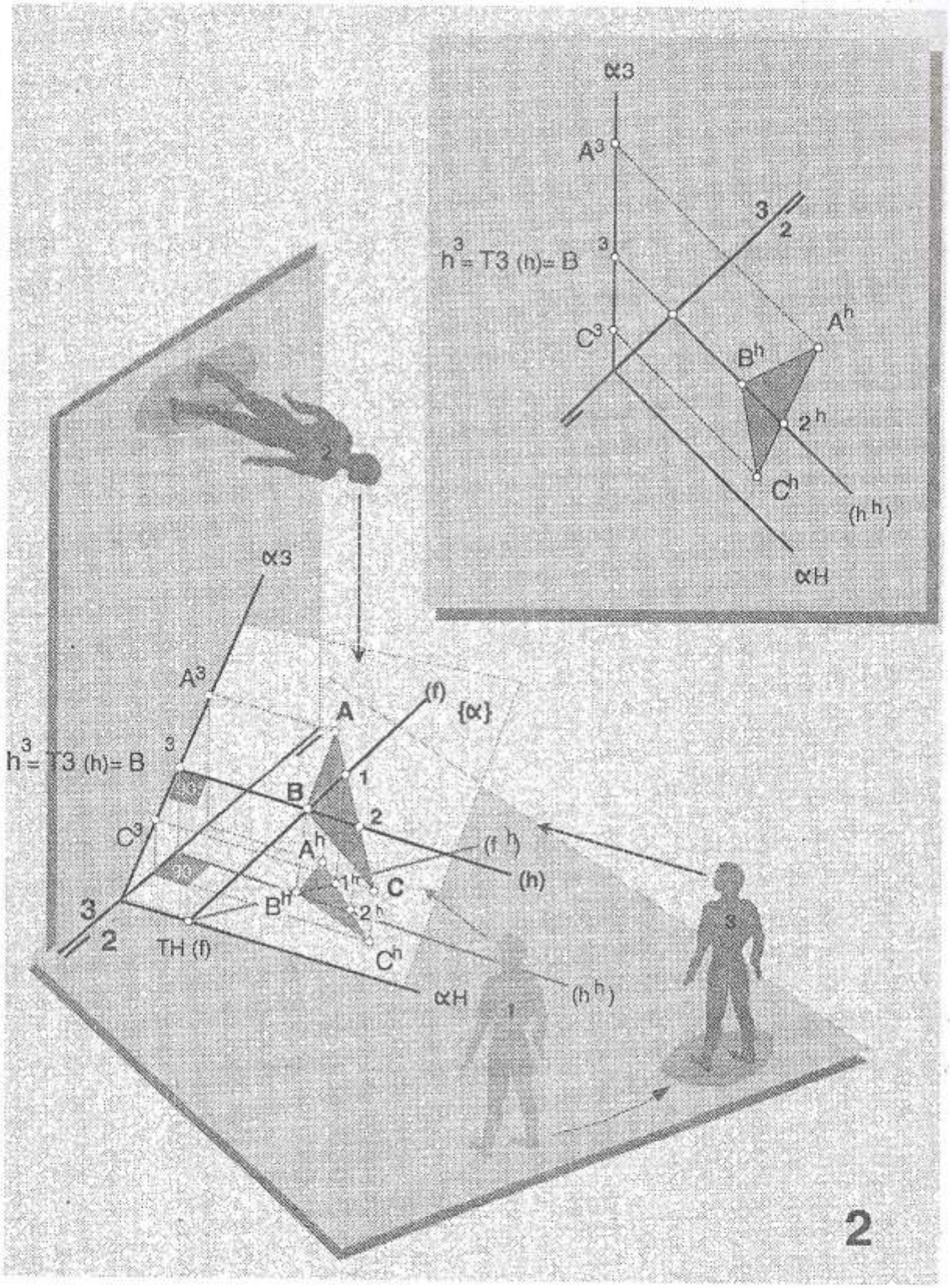
De modo análogo, los ángulos "α" y "β" formados con los planos de proyección horizontal y vertical por el plano que contiene dicha figura , tampoco aparecen revelados a través de ninguna relación perceptible en proyección, tal como suele ocurrir normalmente en el caso de un plano CUALQUIERA.

La representación diédrica que acompaña la figura, es consecuente con esta situación y nos ofrece en cada una de las proyecciones las respectivas imágenes ($A^vB^vC^v$ y $A^hB^hC^h$) de lo que percibimos del triángulo ABC, las cuales coinciden respectivamente con las que nos muestra la figura espacial.

En la figura 2, en la página siguiente, observamos lo que ocurre cuando nos desplazamos desde la posición "1" hasta la "3" , "caminando" sobre el plano horizontal de proyección. El plano vertical acompaña nuestro movimiento ubicándose asimismo en la posición {3} para permitirnos representar la nueva imagen que vemos del plano "ABC".

La representación espacial nos presenta ahora un sistema de proyección secundario —el "LT 3/2"— con respecto al cual el comportamiento del plano {α} es el de un plano PROYECTANTE VERTICAL, lo cual se evidencia en la nueva proyección 3 del triángulo "ABC" donde todos sus vértices han quedado alineados según $A^3B^3C^3$. Fíjese como tambien las trazas αH y αV del plano ocupan la posición correspondiente a las de un plano de este tipo. En la representación espacial de esta figura es fundamental hacer notar que la nueva ubicación {3} del plano vertical, es perpendicular a la horizontal "h" del plano a, lo cual es consecuencia directa de la nueva posición de observación "3" que ahora ocupamos, desde la cual, la dirección de nuestra visual coincide con la de dicha horizontal.

Es obvio que en estas condiciones, la nueva Linea de Tierra "3/2" ocupe tambien una posición perpendicular a la proyección horizontal " h^h " de la horizontal "h", la

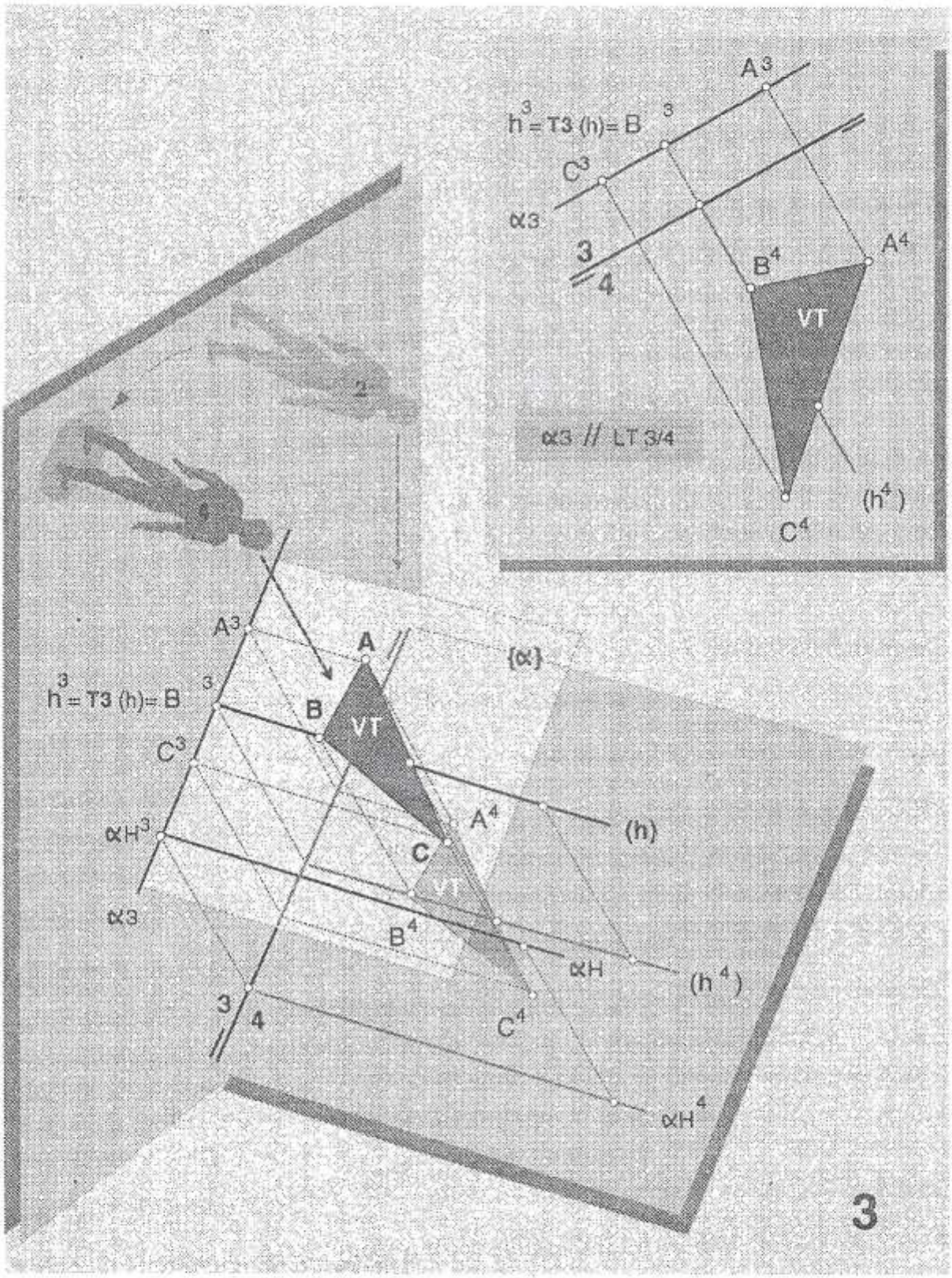

α3
A3
3
2
h3 = T3 (h)= B
3
C3
Ah
Bh
2h
Ch
(hh)
αH
α3
A3
(f)
{α}
A
h3 = T3 (h)= B
3
1
B
2
C3
Ah
(fh)
(h)
1h
C
3
Bh
2h
2
TH (f)
Ch
αH
(hh)
1
3
2

cual se transforma en una RECTA DE PUNTA, situación de la cual nos valemos en DPO, tal como la representación diédrica lo demuestra, para ubicar a LT 3/2. Este primer cambio de posición, sin embargo, aún no nos muestra proyección alguna del triángulo ABC en Verdadero Tamaño.

Ahora bien, si consideramos que en el sistema "LT 3/2", como nos lo muestra ahora la representación espacial de la figura 3, en la página siguiente, conservamos nuestra posición de observación "3", de modo que el plano {3} mantenga tambien la suya, podríamos dar chance a que desde nuestra otra posición de observación "2" -que se dirige ortogonalmente al plano horizontal {2} - nos desplacemos hasta el lugar "4", de modo que nuestra visual se haga perpendicular al plano ABC, y en consecuencia el plano horizontal de proyección se desplace desde su posición {2} hasta la {4}. Ubicados en "4" veríamos al triángulo ABC en Verdadero Tamaño, reflejado como tal en la proyección A^4 B^4 C^4, como consecuencia de la relación de paralelismo que ahora se da entre dichos planos.

Note que por efecto del desplazamiento del conjunto "OBSERVADOR - PLANO", desde "2-{2}" hasta "4-{4}", la nueva linea de tierra "3/4" es paralela a la traza vertical "$\alpha 3$" del plano ABC, el cual con respecto a este nuevo sistema secundario "LT 3/4" pasa a comportarse como un plano HORIZONTAL, revelando consecuentemente —ademas de todas sus características como tal— el Verdadero Tamaño del triágulo ABC en la proyección $A^4B^4C^4$.

Debemos considerar que para ver una figura plana en Verdadero Tamaño en el espacio físico, nos basta con un solo movimiento para desplazarnos a una nueva posición, pues —toda vez que ocupamos un solo punto de observación— simplemente nos colocamos "de frente" a dicha figura. Sin embargo, cuando nuestro espacio real es referido al sistema diédrico, debe someterse a las leyes del espacio diédrico, y cualquier cambio en la posición de observación —ahora,


A3
h3 = T3 (h) = B3
C3
α3
3
4
B4
A4
VT
α3 // LT 3/4
(h4)
C4
A3
A
{α}
h3 = T3 (h) = B3
B
VT
C3
A4
(h)
αH3
C
VT
α3
B4
αH
(h4)
3
4
C4
αH4
3

cuando existen simultaneamente dos de ellas (1 y 2)— implica necesariamente la descomposición de nuestro desplazamiento en dos trayectorias alternas, respectivamente paralelas a los planos de proyección. Cada una de ellas nos lleva a percibir el plano en una posición notable; primero perpendicular a un plano de proyección (como PROYECTANTE) y luego, paralelo al otro. Así, terminamos por "ver de frente" a la figura cuyo tamaño real queremos conocer.

En DPO, esta manipulación se expresa a través de los cambios sucesivos de posición de la Linea de Tierra como expresión de los respectivos cambios de posición de los planos de proyección, consecuencia directa a su vez, de nuestros cambios consecutivos y alternativos de posición de observación. Fíjese muy bien que cada vez que el observador se desplaza de una posición de observación a otra, el plano sobre el cual "camina", se mantiene fijo. No puede ser de otra manera, toda vez que se alteraría la relación de ortogonalidad entre los planos de proyección, condición sobre la cual se establece el sostén fundamental del funcionamiento del sistema de vistas múltiples.

El reconocimiento en la representación diédrica del plano que se mantiene fijo, nos permite "jugar" de cierta manera con el plano que se desplaza sobre aquel, usando nuestra mano en su lugar y colocándola sobre la Línea de Tierra. Al desplazarla hasta la posición que nos conviene podemos imaginar facilmente el resultado a obtener, "dibujando" mentalmente sobre ella la nueva proyección resultante, lo cual nos facilita notablemente la simulación espacial del evento que tiene lugar con la participación de los planos "en juego". Usemos esta sencilla técnica para correlacionar las proyecciones de los próximos ejemplos.

En general, el proceso de llevar un plano CUALQUIERA a una posición de Verdadero Tamaño sigue invariablemente alguna de las dos secuencias

siguientes:

1) Plano CUALQUIERA (LT 1/2) -----> Plano PROYECTANTE VERTICAL (LT 3/2) -----> PLANO HORIZONTAL (LT 3/4), o

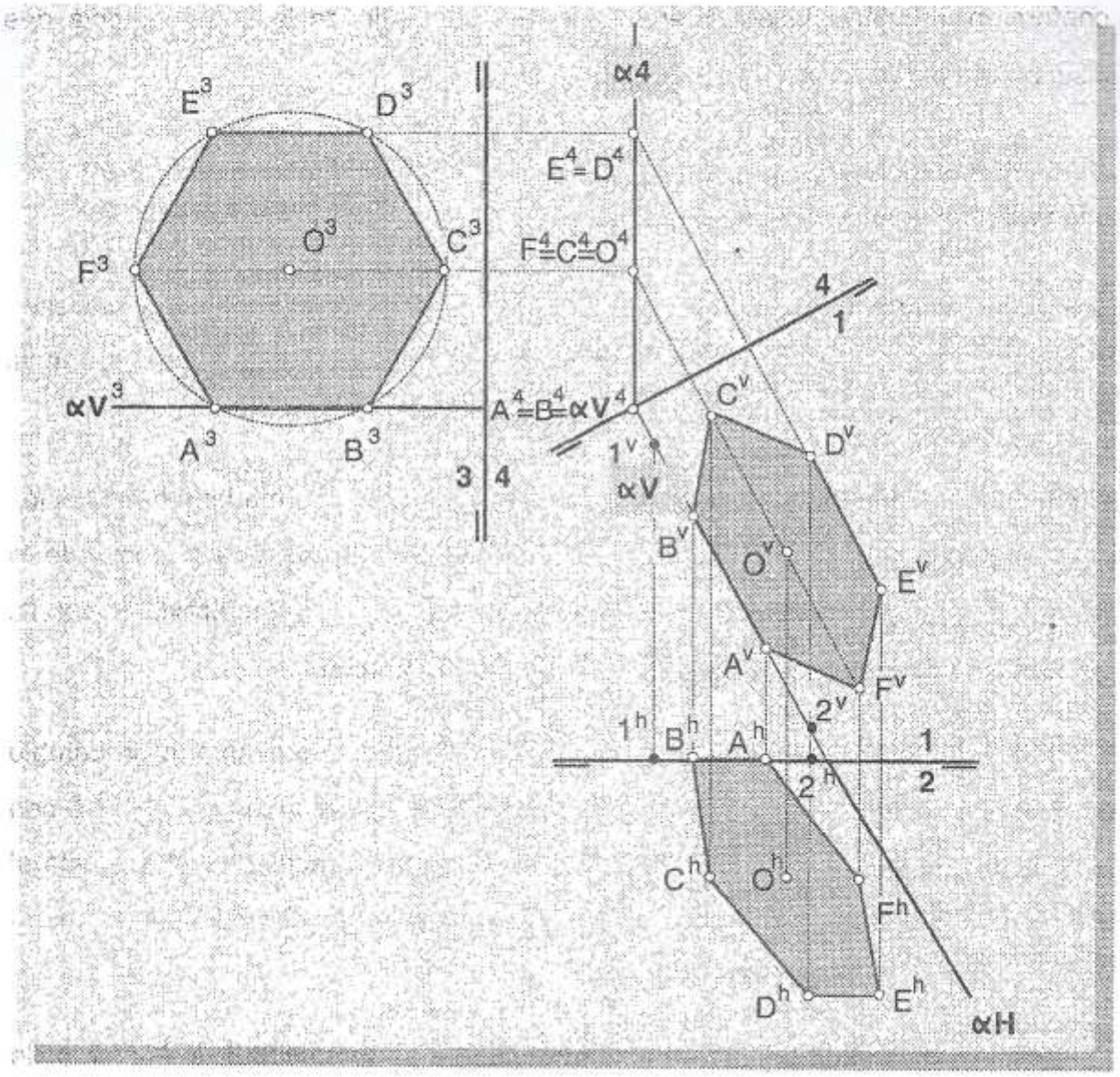
2) Plano CUALQUIERA (LT 1/2) -----> Plano PROYECTANTE HORIZONTAL (LT 1/4) -----> Plano FRONTAL (LT 4/3).

Veamos el ejercicio siguiente, ilustrado en la próxima página:

Sea construir un HEXAGONO REGULAR "ABCDEF", contenido en el plano {α}, cuyo centro es "O" y cuyo lado "AB" descansa en el Plano Vertical de Proyección.

α { O (33, 21, 36); 1(10, 00, 56); 2(37, 00,06) }

De la observación de estos datos concluímos que los puntos 1 y 2 representan a la traza vertical "**αV**" del plano la cual, evidentemente contiene al lado "AB", y que debido a la ubicación de dicho lado, la secuencia de cambios de planos que nos conviene escoger se inicia con un sistema "LT 1/4". Ello se explica, simplemente, porque bajo estas condiciones , un cambio de planos como el propuesto, nos lleva a ver la traza vertical como un punto (αV^4) sobre LT 1/4, el cual coincide con la proyección correspondiente (AB^4) del segmento "AB", con lo que además, llevamos al plano {α} a una posición de PROYECTANTE HORIZONTAL. Esta situación es mucho mas cómoda dentro de la dinámica de resolución que la que se presentaría al proceder iniciando los cambios de plano con un LT 2/3, lo cual aún cuando nos convertiría el plano en un PROYECTANTE VERTICAL, nos presentaría a la traza vertical en una proyección inconveniente "αV^3", que no nos ofrecería la posibilidad de reconocer en esa proyección al segmento "AB", como ocurre al proceder de la manera que nos muestra la figura correspondiente.



En la secuencia del procedimiento que venimos desarrollando, el cambio de planos (4/3), con el cual proseguimos, nos lleva a una posición de Verdadero Tamaño, donde podemos resolver nuestro problema , como es normal, mediante los recursos de la geometría plana, donde el proceso se reduce a construir el polígono pedido, conocido su centro y una recta (1-2) que contiene uno de sus lados (A-B), lo cual es notablemente simple, toda vez que los puntos A, B y O,

conforman un triángulo equilátero, cuyo lado es radio de la circunferencia que inscribe al hexágono pedido.

Obtenida la proyección "$A^3 B^3C^3D^3E^3F^3$", esta es referida, en el sistema "LT 3/4" a la traza $\alpha 4$, sobre la cual aparece alineada su proyección "$A^4B^4C^4D^4E^4F^4$".

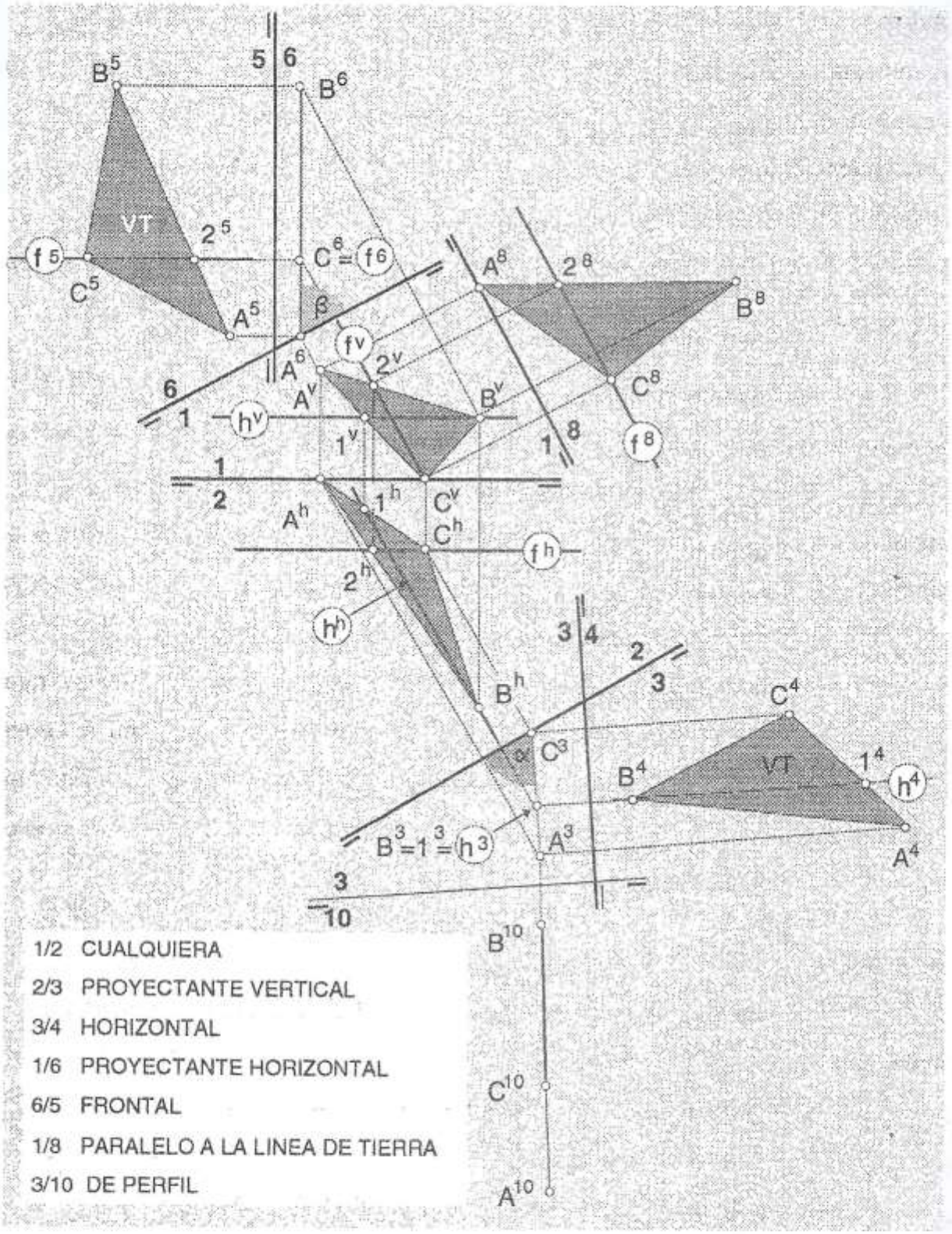
Las proyecciones principales "$A^vB^vC^vD^vE^vF^v$" y "$A^h B^h C^h D^h E^h F^h$" se obtienen al trasladar las cotas y los vuelos respectivos sobre las lineas de referencia correspondientes en los sistemas "LT 4/1" y "LT 1/2".

Al dibujar las proyecciones principales conviene cuidarse de mantener la relación de paralelismo existente entre los lados opuestos de la figura así como de la semejanza de sus magnitudes, pues de ese modo ocurre con las proyecciones de todos aquellos polígonos que tienen un número par de lados.

Notemos cuán acertada fué nuestra decisión de iniciar el proceso con un cambio LT1/4, que al comportarse la traza vertical del plano, como una recta DE PIÉ con respecto al nuevo sistema secundario LT 1/4, también lo hace así con respecto al sistema secundario LT 4/3, lo que nos permite resolver el problema de construir el hexágono buscado como ya lo explicamos.

La figura de la página siguiente nos revela como la versatilidad del Cambio de Planos en la manipulación de polígonos se hace aún mas evidente cuando establecemos la correlación de las proyecciones correspondientes a las posiciones particulares del plano.

Observe que cada uno de los sistemas de proyección, bien puede considerarse aisladamente y cómo, en cada uno de ellos el plano tiene un comportamiento distinto correspondiente a la posición particular que ocupa con respecto a ese sistema. Así lo indica la tabla adyacente a la figura.



1/2 CUALQUIERA

2/3 PROYECTANTE VERTICAL

3/4 HORIZONTAL

1/6 PROYECTANTE HORIZONTAL

6/5 FRONTAL

1/8 PARALELO A LA LINEA DE TIERRA

3/10 DE PERFIL

7. EL PLANO

Así como lo hemos visto en la construcción de polígonos, el Cambio de Planos se manifiesta como una herramienta particularmente útil en la construcción de poliedros y en la determinación de sus proyecciones, toda vez que mediante la correlación progresiva de las diversas proyecciones de sus elementos conocidos, emergen sucesivamente aquellos que no se revelaban en las proyecciones iniciales, permitiendo finalmente disponer de una cadena de imágenes que nos facilitan una lectura coherente e integral de sus características morfológicas.

Por otra parte, cuando se trata de intervenir un objeto tridimensional a través del diseño, ya sea modificando sus características morfológicas a través de la alteración de las relaciones internas de sus elementos constituyentes, o de la supresión o adición de partes, o bien, cuando se trata de la concepción de piezas volumétricas —cualquiera sea su naturaleza o aplicación— o de espacios arquitectónicos; la generación de vistas múltiples en la dinámica del Cambio de Planos aporta un medio sencillo y versátil de análisis gráfico, toda vez que cualquier tipo de intervención sobre el objeto, se manifiesta en forma simultánea en todas las vistas del mismo, lo cual contribuye considerablemente a facilitar el proceso de diseño al ofrecerse como una herramienta flexible en el manejo integral de la representación gráfica.

Toda vez que hasta ahora nos hemos dedicado a la descripción de las características morfológicas y del comportamiento en el ámbito del sistema diédrico de las rectas y los planos, y de las figuras geométricas asociadas a ellos, es tiempo de indagar en el capítulo siguiente, las distintas relaciones que se dan entre estos elementos en el espacio diédrico, para así disponer del conocimiento fundamental que nos permitirá introducirnos finalmente al mundo de los poliedros.

CUESTIONARIO

I. Responda las siguientes preguntas.

1. ¿ Qué es un plano?

2. ¿ Nombre cuatro formas de definir un plano en el espacio?

3. ¿ Qué son las trazas de un plano?

4. ¿ Con qué tipo de caracteres se denotan en el espacio? 5. ¿ y en proyecciones?

6. ¿ Qué son las rectas características de un plano?

7. ¿ Cuál condición debe cumplirse para que un ángulo recto revele su magnitud real en proyección ortogonal ?

8. ¿ Qué es la Recta de Máxima Pendiente de un plano? 9. ¿ En cuál posición se encuentra ?

10. ¿Qué es la Recta de Máxima Inclinación de un Plano? 11. ¿ En cuál posición se encuentra ?

12. ¿ Diga en cuál posición se encuentran los planos cuyos ángulos con los planos de proyección se indican a continuación ?

I. $\alpha = 45º$
$\beta = 90º$ _____

II. $\alpha = 30º$
$\beta = 0º$ _____

III. $\alpha = 0º$
$\beta = ?$ _____

IV. $\alpha = 60º$
$\beta = 30º$ _____

V. $\alpha = 90º$
$\beta = 90º$ _____

VI. $\alpha = 90º$
$\beta = 30º$ _____

VII. $\alpha = q$
$\beta = 0º$ _____

VIII. $\alpha = 0º$
$\beta = 0º$ _____

13. ¿Cuál es la magnitud del ángulo que forman entre sí las trazas de un plano proyectante en el espacio?

14. ¿En cuál posición particular se encuentra la recta de máxima inclinación en c/uno de los siguientes planos:

I. Proyectante Vertical_____
II.Proyectante Horizontal_____
III. Que contiene a LT_____
IV. Frontal_____
V. De perfil _____
VI. Paralelo a LT_____
VII. Horizontal_____
VIII. Cualquiera_____

15. ¿En cuál posición particular se encuentra la recta de Máxima Pendiente en c/uno de los siguientes planos:

I. Proyectante Vertical_____
II.Proyectante Horizontal_____
V. De perfil _____
VI. Paralelo a LT_____

III. Que contiene a LT_____ VII. Horizontal_____

IV. Frontal_____ VIII. Cualquiera_____

16. ¿ Si un plano es paralelo a uno de los planos de proyección, cómo es con respecto al otro?

17. ¿ Si un plano es perpendicular a uno de los planos de proyección, cómo puede ser con respecto al otro?

18. ¿ Si un plano es oblícuo a uno de los planos de proyección, cómo puede ser con respecto al otro?

19. ¿Cuál condición debe cumplirse para que un plano muestre en alguna proyección el Verdadero Tamaño de las figuras geométricas contenidas en él?

20. ¿ Sí un plano es paralelo a un plano de proyección, cuál posición tiene su traza con el otro plano de proyección?

21. ¿ Sí un plano es perpendicular a un plano de proyección, cuál posición tiene su traza con el otro plano de proyección?

22. ¿ Qué es Rebatir un Plano?

23. ¿ Si Ud. quiere convertir un plano CUALQUIERA en un plano FRONTAL, debe convertirlo primero en _____mediante un Cambio de Planos _____

24. ¿ Si Ud. quiere convertir un plano CUALQUIERA en un plano HORIZONTAL, debe convertirlo primero en _____mediante un Cambio de Planos _____

RELACIONES GEOMETRICAS

En un rápido recuento de los capítulos anteriores podemos verificar que hasta ahora solo hemos hecho descripciones de las cualidades morfológicas de las rectas y los planos, y de las figuras asociadas a ellos (segmentos y polígonos, respectivamente). Tambien hemos estudiado todas las posibles posiciones en las cuales estos elementos se ubican frente a los planos de proyección y las hemos tipificado y agrupado bajo el nombre de POSICIONES PARTICULARES. Por otra parte, además de algunos procedimientos constructivos propios de la Geometría Plana como el Teorema del Arco Capaz y las construcciones de Polígonos, hemos estudiado un conjunto de procedimientos adicionales pertenecientes al ámbito de la Doble Proyección Ortogonal, tales como el GIRO, el REBATIMIENTO, y el CAMBIO DE PLANOS, los cuales -entre otras aplicaciones que trataremos ulteriormente- nos permiten reconocer las magnitudes de ciertos ángulos y manipular Verdaderos Tamaños. Con excepción, sin embargo, de los tópicos relacionados a las TRAZAS y a las posiciones particulares, donde hemos manejado precariamente algunas de las relaciones que se dan entre ellos, no hemos estudiado aún cómo interactúan entre sí estos elementos en el espacio, es decir, cómo se establecen entre ellos las Relaciones Geométricas.

Las Relaciones Geométricas comprenden todo el universo de las diversas posiciones relativas que guardan entre sí los distintos elementos geométricos en el espacio, fundamentalmente las rectas y los planos. Mediante su tipificación y descripción tenemos acceso a una importante herramienta adicional en el proceso de interpretación y análisis de problemas, y en la aplicación de los diversos procedimientos de solución a los mismos.

De manera global ellas comprenden, en primer lugar, aquellas relaciones notables

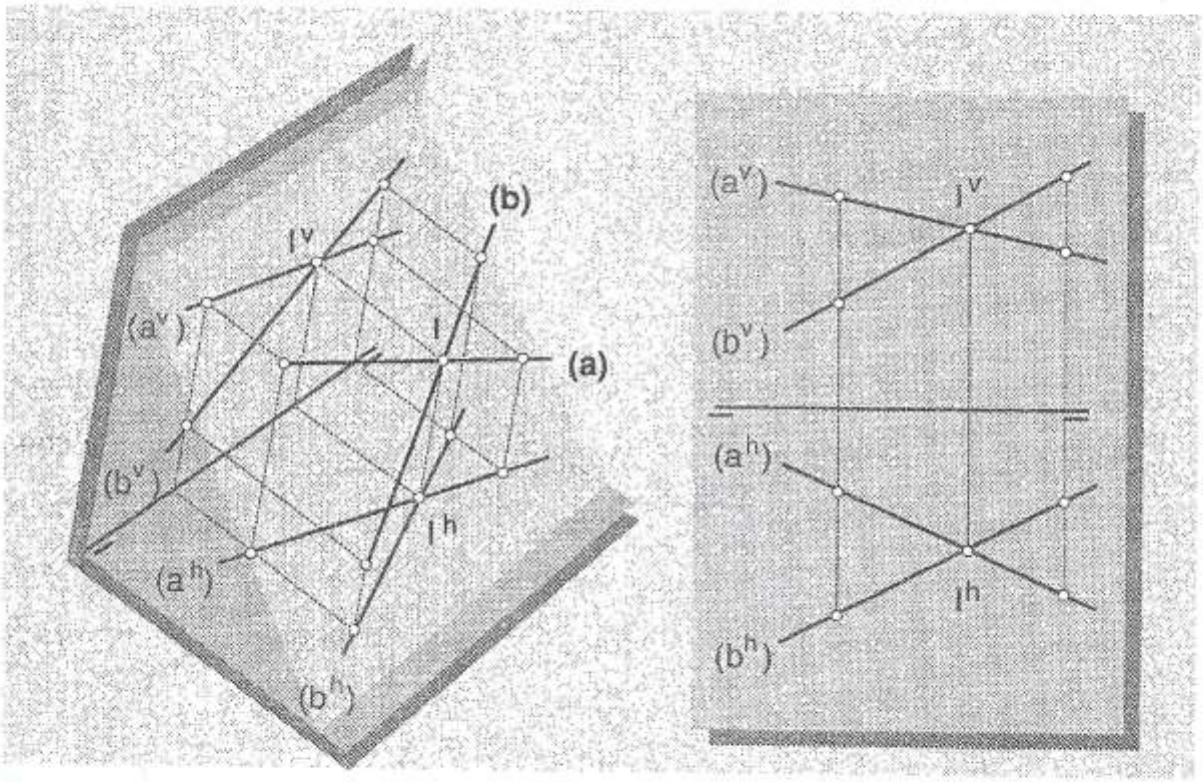
que se establecen de manera indiferenciada entre las rectas y los planos, es decir el PARALELISMO y la PERPENDICULARIDAD. Por otra parte, encontramos aquellas de naturaleza particular que afectan simultaneamente a dos o más de esos mismos elementos geométricos en el espacio, como son las INTERSECCIONES, y las DISTANCIAS y los ANGULOS comprendidos entre ellos.

Toda vez que estas relaciones constituyen en sí mismas una globalidad, los procedimientos para manipularlas en DPO sugieren la conveniencia de describirlas en un orden distinto al enunciado, de modo que, en primer lugar, comenzaremos por estudiar las relaciones de intersección.

INTERSECCIONES.

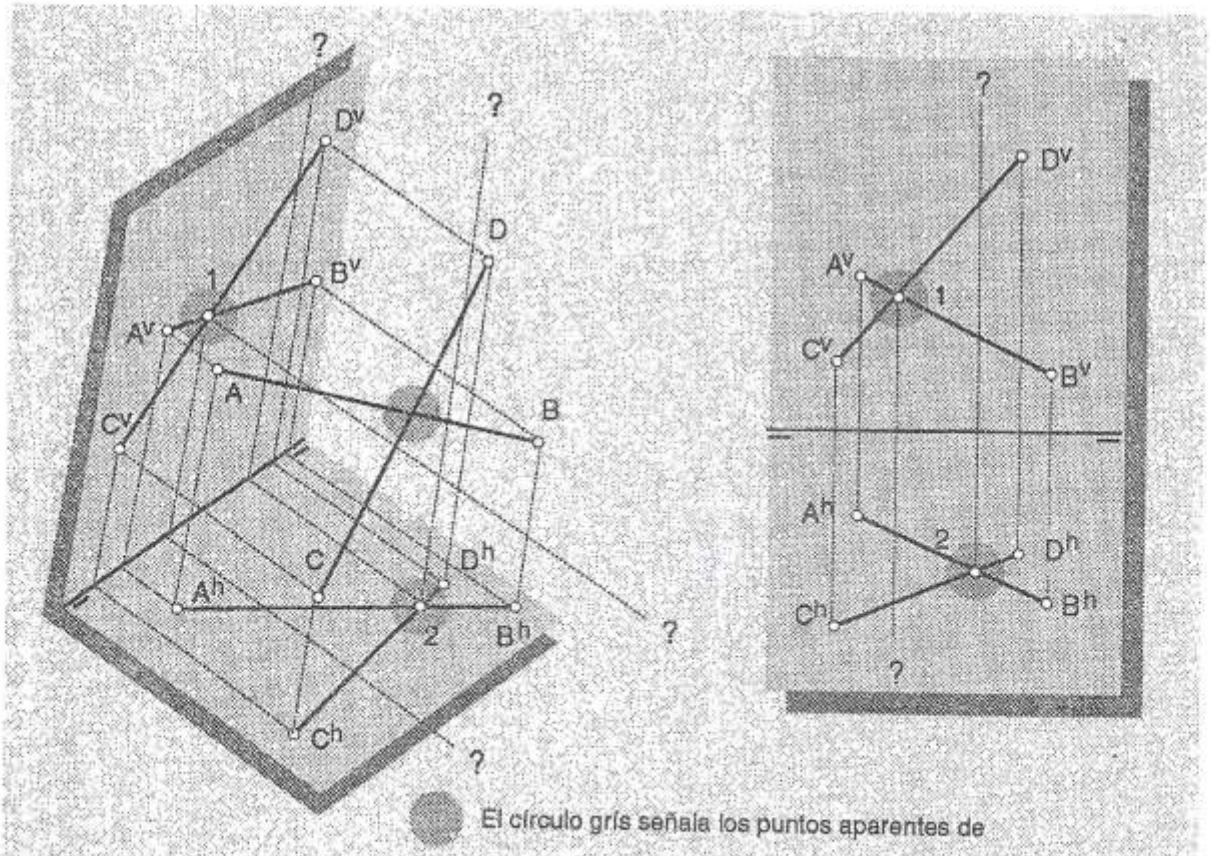
INTERSECCION ENTRE RECTAS.

Cuando dos rectas (a) y (b) se intersectan se dice que son secantes, y como tales disfrutan de un punto común " I ". Así, solo pueden ser secantes, dos rectas que



pertenezcan a un mismo plano (coplanares) y tengan direcciones distintas.

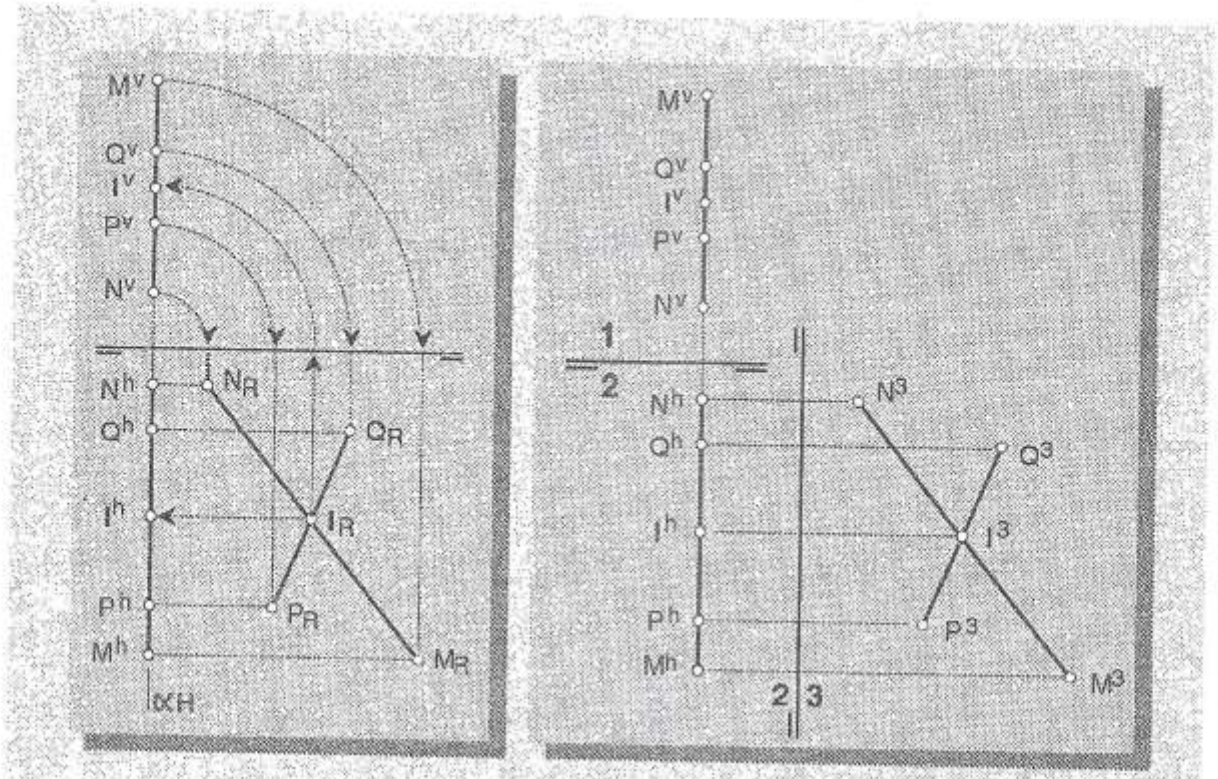
Naturalmente, dos rectas no coplanares que tengan distintas direcciones no pueden ser secantes y por tanto no tienen puntos comunes, lo cual en DPO se manifiesta en el hecho de que los puntos de corte de sus respectivas proyecciones no coinciden en una linea de referencia común. Se dice entonces que dichas rectas "se cruzan" en el espacio.



Las rectas representadas por los segmentos AB y CD no se cortan pués no existe ningún punto común entre ellas. Observe que las líneas de referencia trazadas desde los puntos aparentes de intersección 1 y 2 en proyección, no coinciden entre sí, como tampoco lo hacen con el punto de corte aparente entre los segmentos en el espacio.

Observe como en la figura anterior, los puntos de corte aparente (1 y 2) de las respectivas proyecciones de los segmentos AB y CD no coinciden sobre la misma línea de referencia, lo cual es indicación de que las rectas expresadas por dichos segmentos no son secantes.

El punto de intersección entre dos rectas de perfil cuyo origen es común no se evidencia de una manera tan directa, puesto que sus respectivas proyecciones aparecen confundidas en una misma línea de referencia. En este caso es obvio que llevando el plano determinado por ellas a una posición de Verdadero Tamaño el punto buscado se hará evidente. Las figuras siguientes nos muestran las diversas alternativas de solución a este problema.



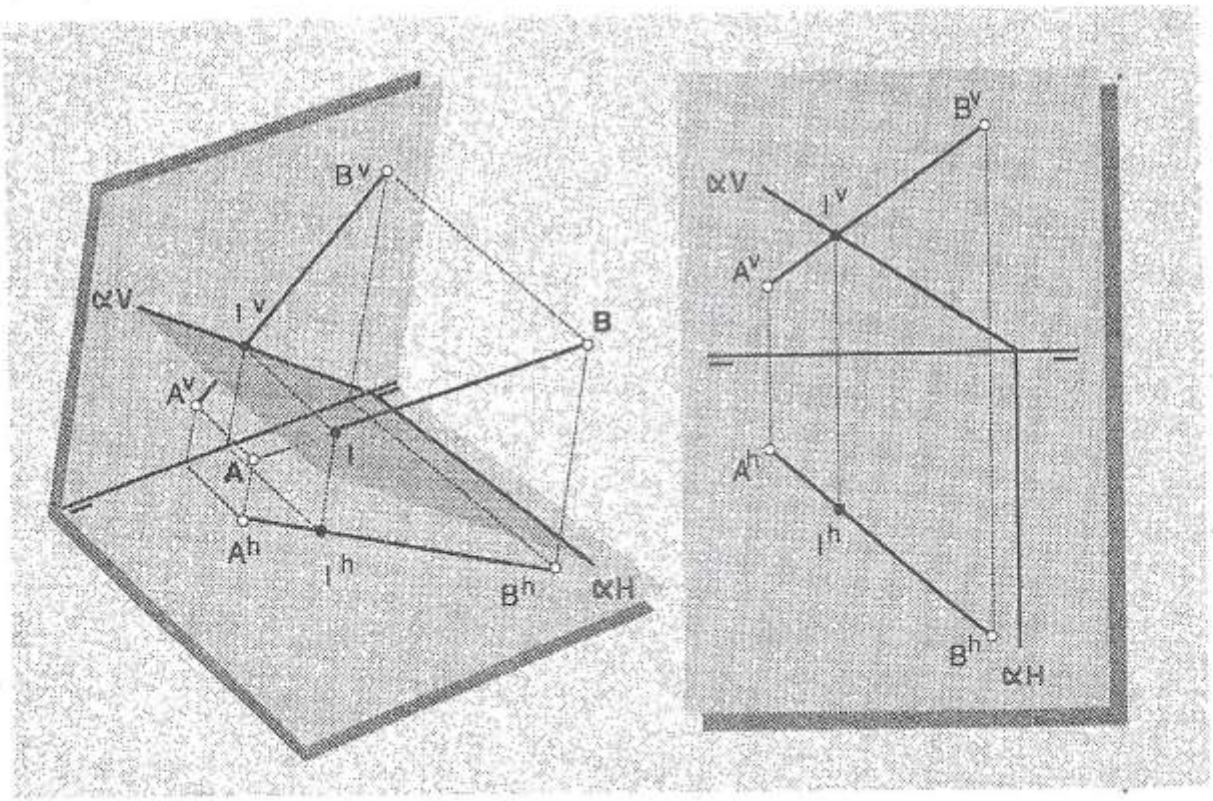
Determinación del punto de intersección "I" entre dos segmentos De Perfil ("MN" y "PQ") aplicando REBATIMIENTO

Determinación del punto de intersección "I" entre dos segmentos De Perfil ("MN" y "PQ") aplicando CAMBIO DE PLANOS

INTERSECCION ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

La intersección entre una recta y un plano es un punto común a ambos. En aquellos cinco casos que el plano ocupa una posición proyectante, este punto común de

intersección es localizable directamente donde se cortan la proyección correspondiente de la recta y la respectiva traza proyectante del plano, como lo ilustra la figura siguiente, donde aparece la intersección entre una recta cualquiera y un plano proyectante vertical.



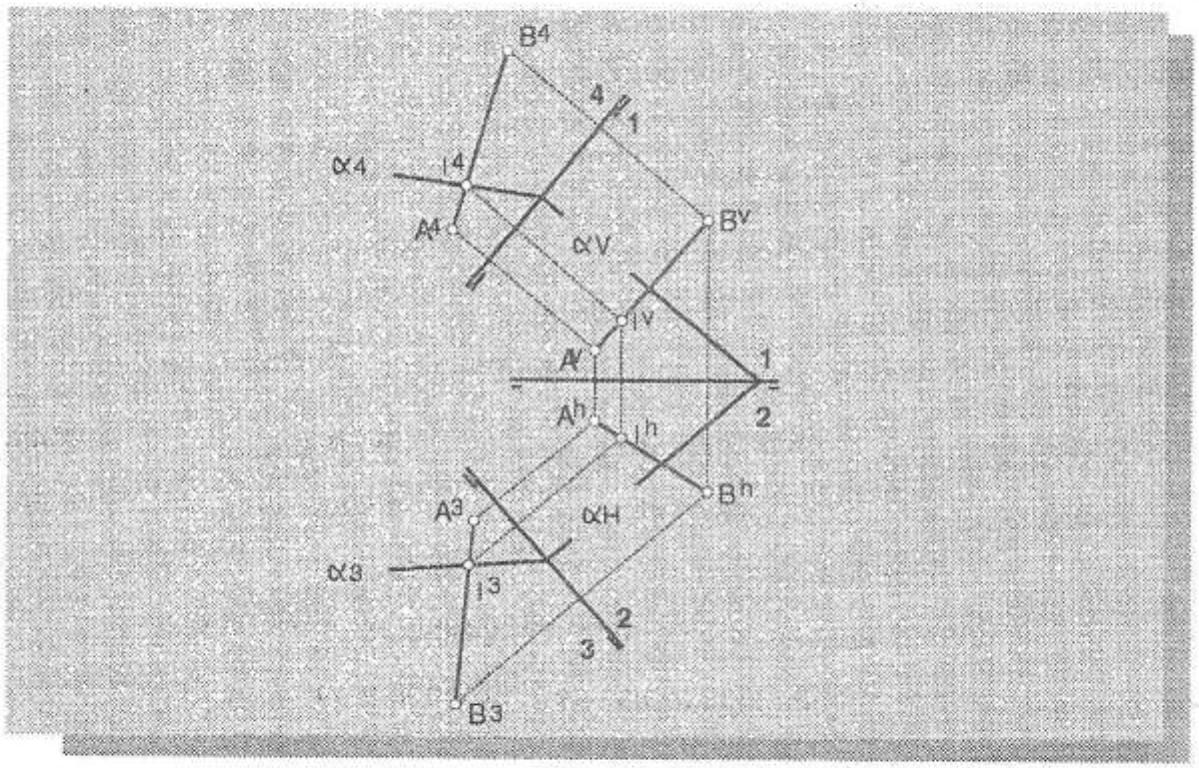
En los casos de los planos PARALELO A LT y CUALQUIERA, la localización del punto de intersección no es directa como en los casos anteriores, por lo cual es necesario recurrir a procedimientos que conduzcan a su determinación. En general, los utilizados para ello son básicamente dos: el CAMBIO DE PLANOS y el del PLANO PROYECTANTE (RECTA TAPADA), los cuales describiremos a continuación aplicados a cada uno de estos casos.

Sea por ejemplo, determinar la intersección entre el plano CUALQUIERA {α} y la recta cualquiera "AB".

Cambio de Planos

En los primeros casos descritos hemos verificado como siempre que un plano aparece en posición proyectante, permite visualizar directamente el punto de penetración de cualquier recta, en el corte de su traza proyectante con la respectiva proyección de dicha recta.

De manera que cuando aplicamos el cambio de planos a la resolución de este problema nos interesa visualizar el plano en una posición proyectante. Es así que cualquier cambio de planos, Vertical u Horizontal, puede llevarnos rápidamente a localizar el punto de intersección, como lo ilustra la figura anterior, donde los nuevos sistemas de proyección LT 1/4 y LT 2/3, nos conducen a convertir al plano {α} en PROYECTANTE HORIZONTAL Y PROYECTANTE VERTICAL respectivamente, pudiendo así determinar la presencia del punto de intersección " I " en forma directa.

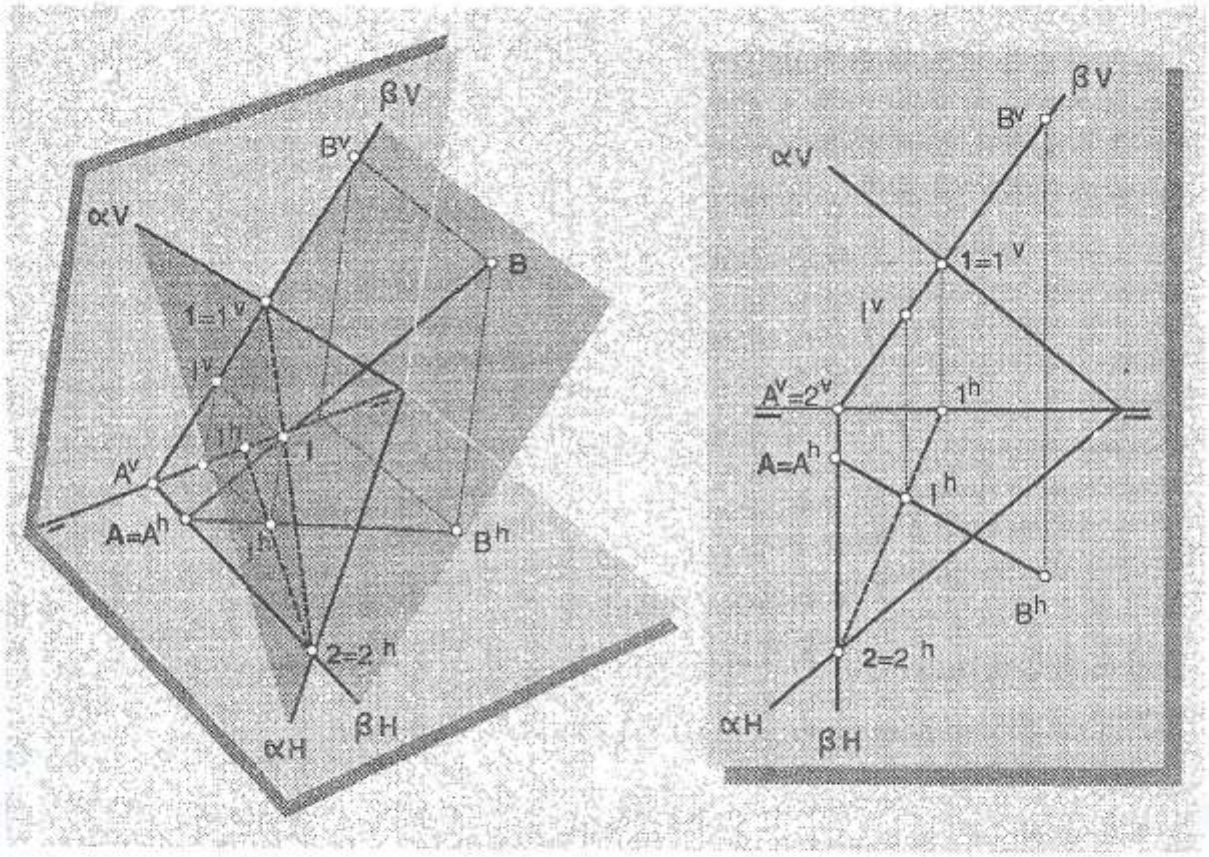


Plano Proyectante (Recta Tapada).

Si hiciéramos pertenecer la recta "AB" a un plano proyectante vertical u horizontal, una de esas dos proyecciones se confundiría con la respectiva traza proyectante.

En el caso ilustrado por las figuras siguientes, hemos recurrido a un plano Proyectante Vertical {β}, el cual, al contener a la recta "AB", confunde en su traza vertical "βV" la proyección vertical "A^VB^V" de la recta.

Vemos allí, como las respectivas trazas verticales (αV y βV) de los planos {α} y {β} se cortan en el punto "$1=1^V$", así como tambien lo hacen las respectivas trazas horizontales (αH y βH) en el punto "$2=2^h$". Debido a que dichos puntos son comunes a ambos planos, la recta "1-2" que ellos determinan representa a la intersección de dichos planos.



El punto " I ", donde las rectas " 1-2 " y " AB " son secantes, representa la penetración de esta última en el plano {α}.

De la observación detallada de la figura anterior inferimos que la recta "1-2" no es mas que una recta del plano {α} cuya proyección vertical "1^V-2^V" se confunde con la proyección correspondiente "A^VB^V" de la recta "AB". Apoyados en esta evidencia, este procedimiento puede simplificarse pretendiendo que una de las dos proyecciones de la recta "AB", en este caso, la vertical (A^VB^V), se confunda con la misma proyección (1^V-2^V) de otra recta (1-2) que pertenece al plano {α} en el cual la queremos penetrar.

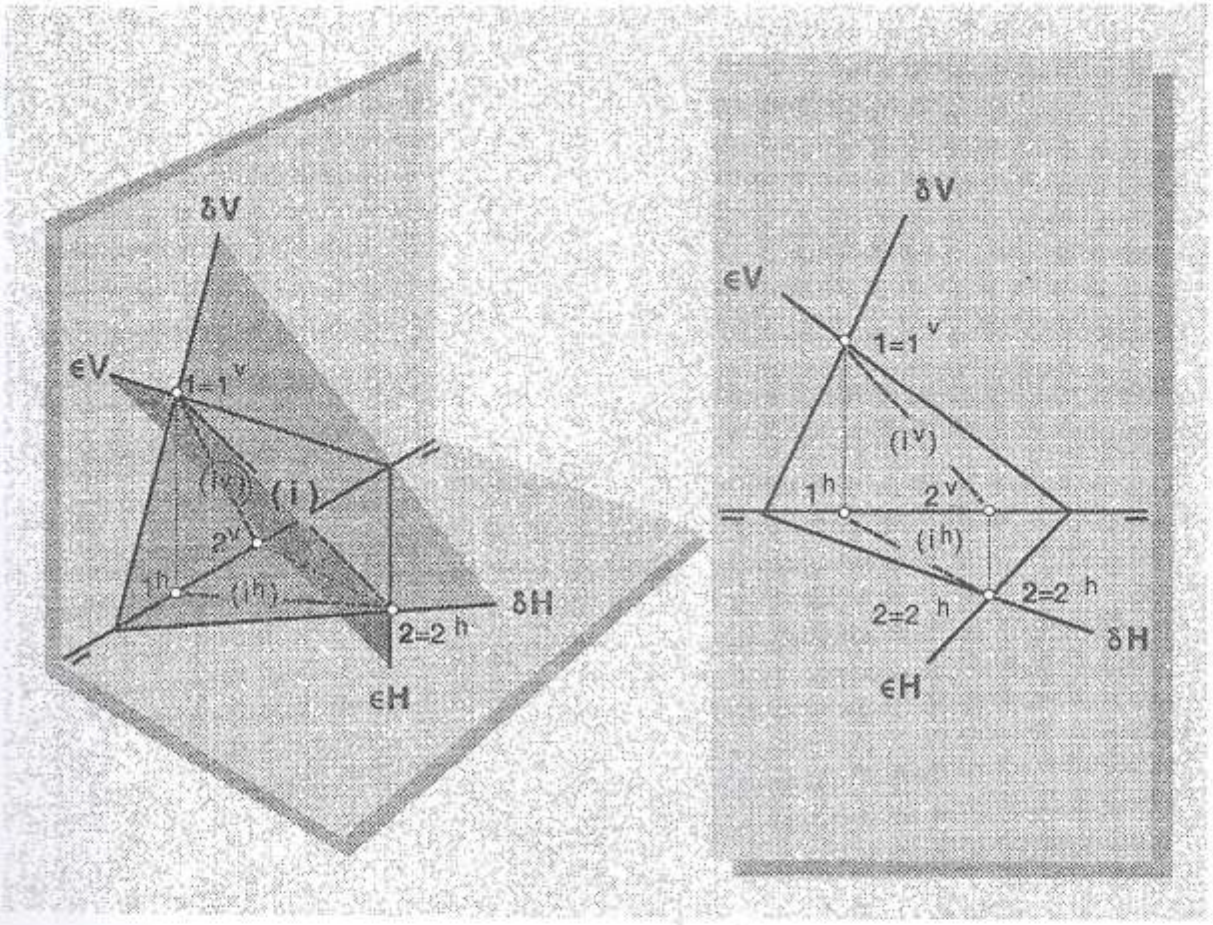
Entendido así, nos percatamos que las rectas "AB" y "1-2" determinan un plano proyectante vertical, el cual es semejante al plano {β} que utilizamos en nuestra interpretación inicial. No obstante, se dice que una de las rectas ha "tapado" a la otra, por lo cual, al concebirlo de esta manera, se suele ignorar que en realidad ambas rectas forman ese plano proyectante, y el proceso de solución suele identificarse como el de la "recta tapada". Toda vez que ambas rectas (AB y 1-2), determinan al plano proyectante {β}, el punto de intersección "I" de ambas expresa la penetración de la recta "AB" en el plano {α}, la cual es visible directamente en la proyección horizontal " I^h " y se localiza, en proyección vertical, mediante una linea de referencia que corta a la proyección respectiva de la recta "AB" en " I^V ".

INTERSECCION DE PLANOS

Dos planos se intersectan siempre a lo largo de una línea recta, la cual —como es obvio— constituye un conjunto de puntos común a ambos planos, tal como nos lo mostró el ejemplo que acabamos de ilustrar en el ejemplo anterior con los planos {α} y {β}.

Veamos lo que ocurre al intersectar dos planos CUALESQUIERA como {δ} y {ϵ}, los cuales están dados por sus trazas, como es el caso que muestra la ilustración siguiente, donde la determinación de dicha recta es muy sencilla.

Las trazas verticales "αV" y "βV" disfrutan de un punto de intersección común en "$1=1^V$", así como lo hacen las trazas horizontales "αH" y "βH" en "$2=2^h$". Dichos puntos, al tiempo que son comunes a ambos planos, determinan a la recta "1-2", que —como es natural— comparte tambien la misma propiedad de ser común a ambos planos.

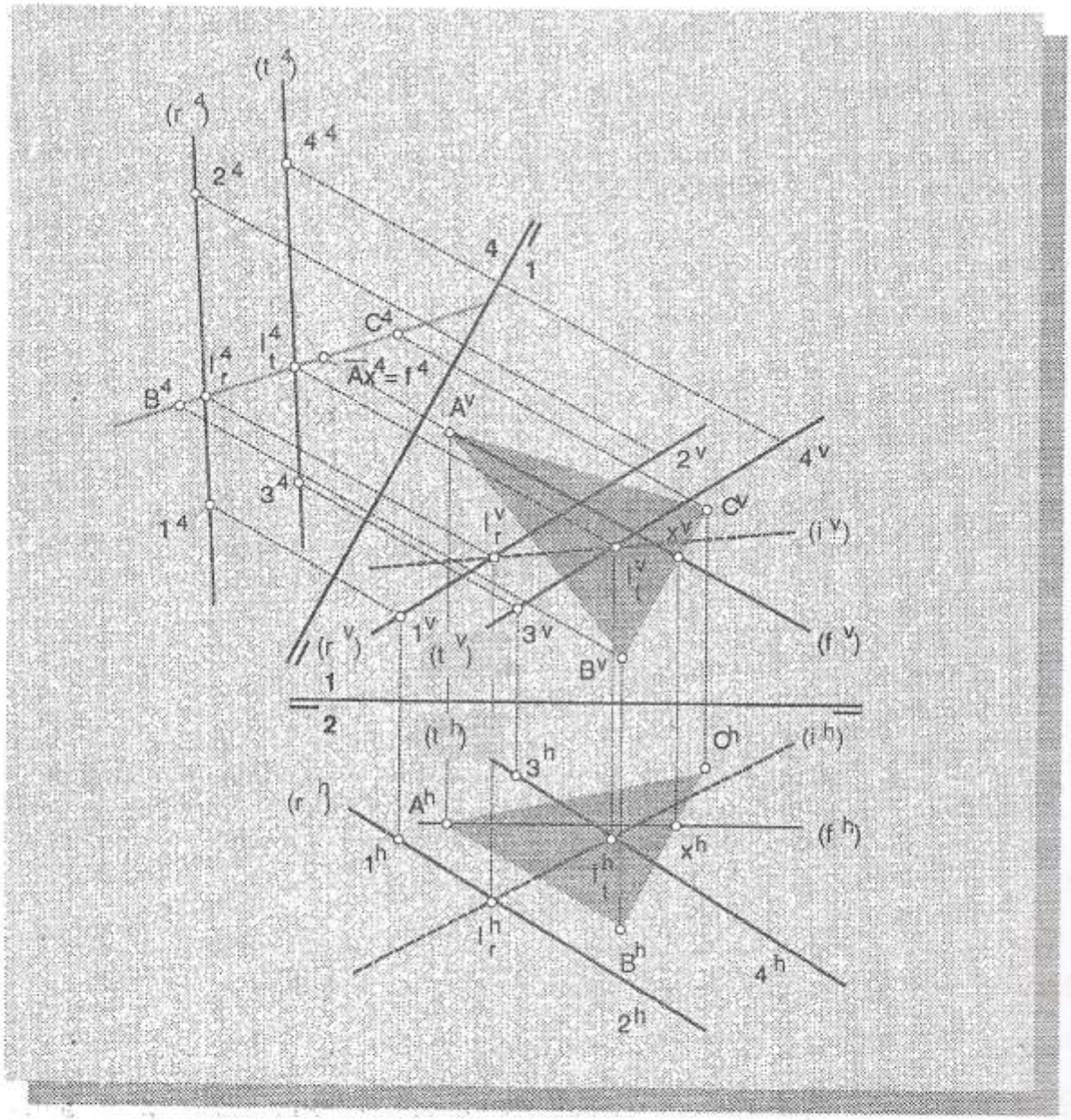


Sin embargo, en aquellos casos donde la representación de los planos a intersectar no conduce a una identificación directa de puntos comunes, es necesario recurrir a alguno de los procedimientos que ya hemos visto aplicar a los

casos anteriores; es decir, el Cambio de Planos o el Plano Proyectante.

Sea por ejemplo, determinar la recta de intersección entre los planos "ABC" y "r//t", ilustrados en la figura siguiente.

La aplicación del Cambio de Planos nos conduce rápidamente a establecer la posición de dicha recta cuando convertimos el plano ABC en un Proyectante Vertical, al referirlo al sistema secundario LT 4/1.

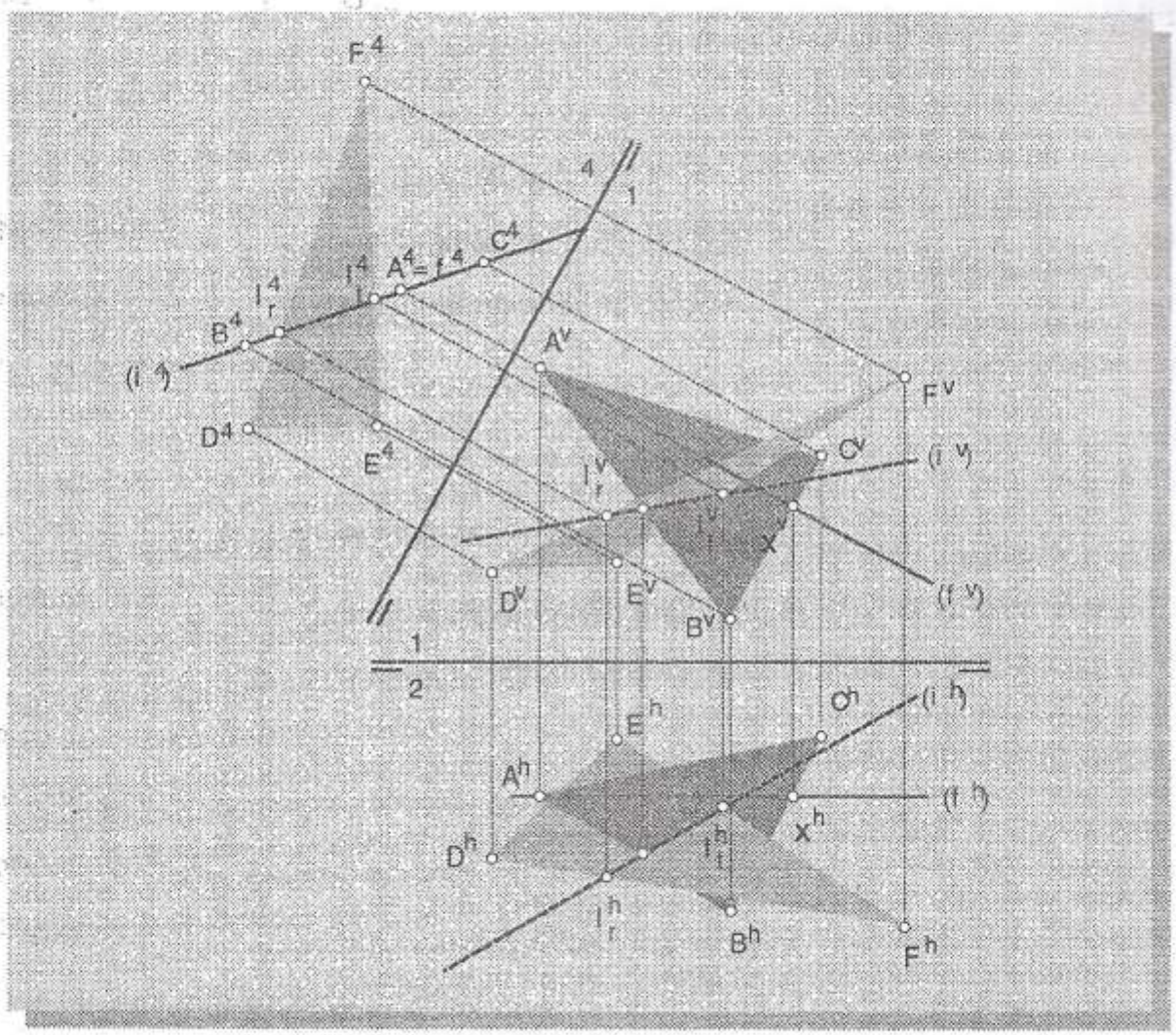


En el plano de proyección 4 podemos observar entonces como las proyecciones de las rectas (r^4 y t^4) cortan directamente en los puntos "I_r^4" e "I_t^4" a la proyección correspondiente "A^4 B^4 C^4" del plano "ABC".

Dichos puntos, al ser trasladados por alineamiento sobre las proyecciones respectivas de las rectas "r" y "t" en el sistema principal, aparecen representando a la recta de intersección entre los planos dados, la cual está expresada por las proyecciones "i^V" e "i^h".

Volviendo a la determinación de la recta de intersección, la aplicación del procedimiento convencional del Plano Proyectante o de la Recta Tapada, acudiría por ejemplo a determinar por separado las correspondientes penetraciónes de las rectas "r" y "t" en el plano "ABC" de una forma semejante a la que aplicamos en el caso de intersección entre recta y plano. Tenga bien en cuenta que la intersección entre dos planos, siendo una linea recta, queda geométricamente determinada por dos puntos, que en este caso no serán otros que las intersecciones respectivas de un par cualquiera de rectas con el plano correspondiente. De modo que de todas las rectas presentes en este problema, no tiene importancia alguna cual sea el par de rectas escogido para ubicar dichos puntos de intersección, pues siempre habremos de arribar a la misma solución.

La presencia de la recta de intersección entre dos planos se hace aún mas obvia cuando los planos que intervienen en el problema están ambos representados por tres puntos, como nos lo muestra la figura que veremos en la página siguiente, en la cual determinamos la recta de intersección " i " entre los planos "ABC" y "DEF".



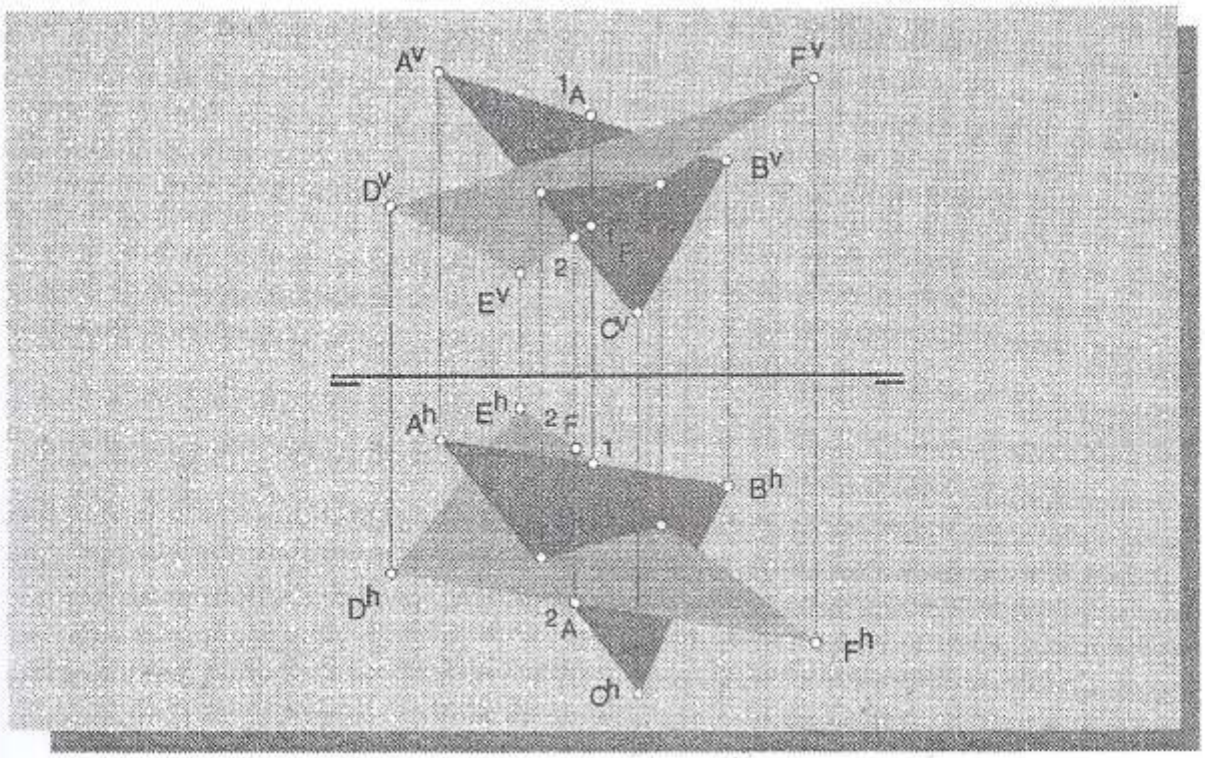
Toda vez que dichos planos quedan expresados como dos triángulos "ABC" y "DEF", la visualización de la recta común es evidenciada ostensiblemente cuando determinamos las partes ocultas y visibles de cada uno de los triángulos, es decir, cuando establecemos la visibilidad de ambos, procedimiento que explicaremos a continuación.

VISIBILIDAD

El objeto de determinar la visibilidad entre dos figuras dadas consiste, como nos sugiere el gráfico anterior, en establecer cuales son las partes visibles y cuales las

ocultas en cada una de las proyecciones.

Es obvio que, en proyección horizontal, las areas visibles están determinadas por aquellos puntos que tienen mayor cota, es decir, que están mas arriba, y que consecuentemente ocultan a los de menor cota. Algo semejante ocurre con la visibilidad de la proyección vertical, donde los puntos visibles, es decir, los de mayor vuelo ocultan tras de sí a aquellos que están por detras, es decir, a los que tienen menor vuelo.



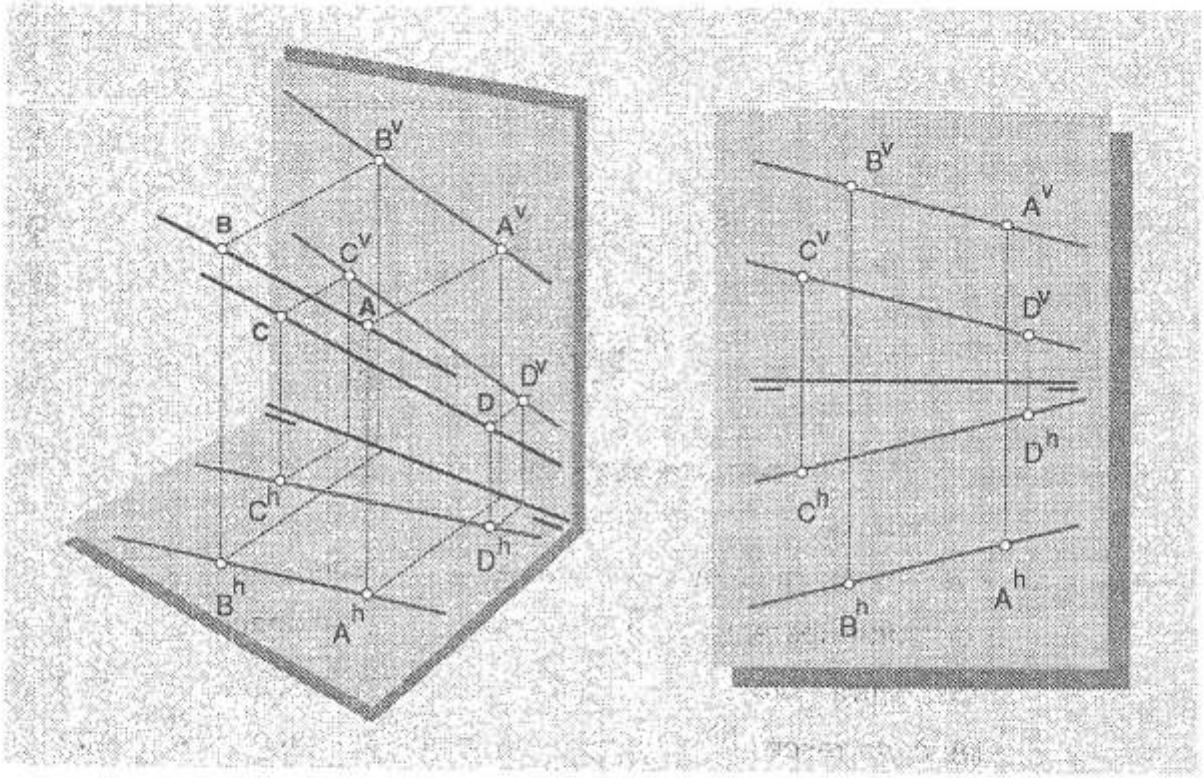
En la figura observemos que, en proyección horizontal, las rectas "AB" y "EF" tienen en "1" un punto de corte aparente. Al subir una línea de referencia desde dicho punto hasta las respectivas proyecciones verticales de tales rectas, descubrimos que dicha línea las corta respectivamente en dos puntos distintos, "1_A" y "1_F", de los cuales el primero goza de mayor cota. Ello nos indica que, a su vez, la recta "AB" —que lo contiene— tambien disfruta de mayor cota y por tanto, en la

proyección horizontal, oculta a la recta "EF" en el punto de corte aparente "1" y, en consecuencia, se nos mostrará visible. El mismo procedimiento, aplicado a cada uno de los puntos de corte aparente en proyección vertical, nos llevará a establecer la visibilidad total de dicha proyección.

Para determinar la visibilidad de la proyección vertical escogemos por ejemplo, el punto de corte aparente (2) de las proyecciones verticales de dos rectas como "AC" y "EF", y procedemos a alinearlo sobre sus respectivas proyecciones horizontales, donde encontramos que el punto de menor vuelo es (2_F), y que por tanto la recta "AC" es, naturalmente, visible en proyección vertical al contener el punto de mayor vuelo (2_A) .

PARALELISMO

PARALELISMO ENTRE RECTAS



Dos rectas "AB" y "CD" son paralelas cuando ambas tienen la misma dirección (recordemos que esta es precisamente una de las formas de definir un plano en el

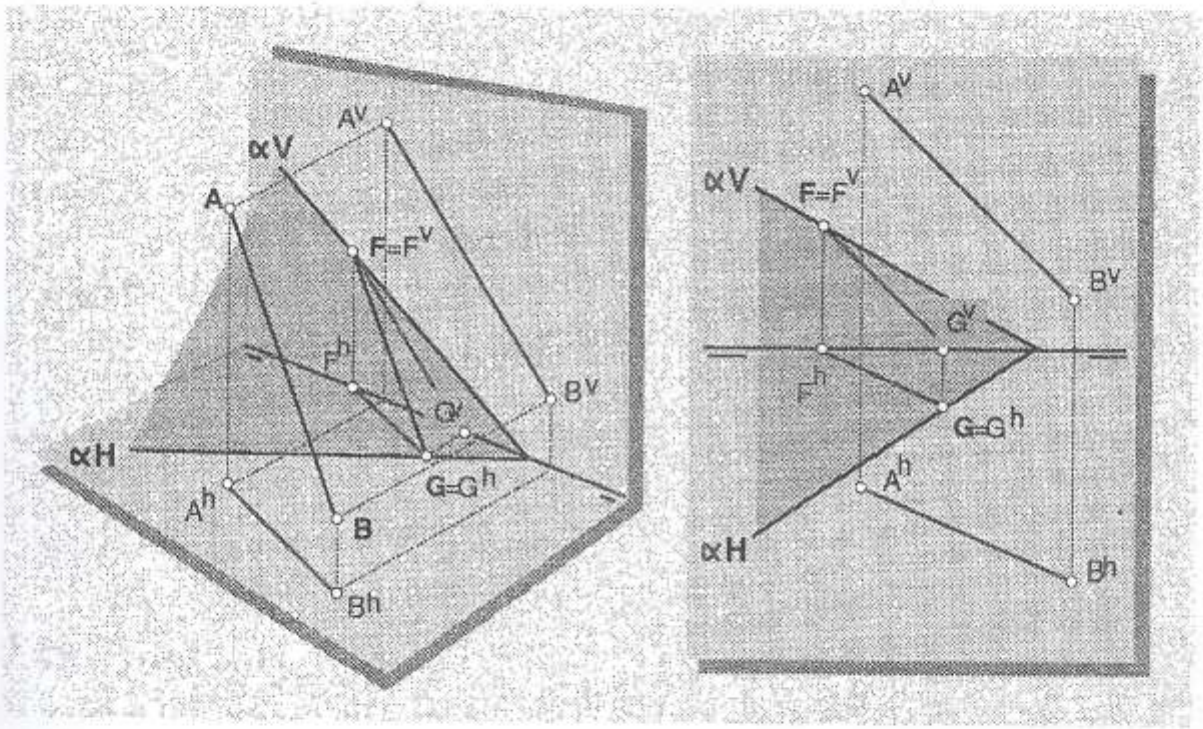
espacio). Consecuentemente, el ángulo que ellas forman entre sí tiene un valor igual a 0º y la distancia que las separa tiene una magnitud constante.

El paralelismo es una relación que se conserva en DPO, de manera que siempre que dos rectas sean paralelas en el espacio, sus respectivas proyecciones ortogonales tambien lo serán, como lo vemos en el gráfico donde se cumple que AB^h // CD^h y AB^v // CD^v.

Es obvio que el lugar que ocupa una recta en el espacio no puede ser simultaneamente ocupado por otra, de modo que por un punto exterior a una recta solo puede pasar una sola recta que le sea paralela.

PARALELISMO ENTRE RECTAS Y PLANOS.

Para que una recta y un plano sean paralelos entre sí basta que la recta sea paralela al menos a una recta del plano.

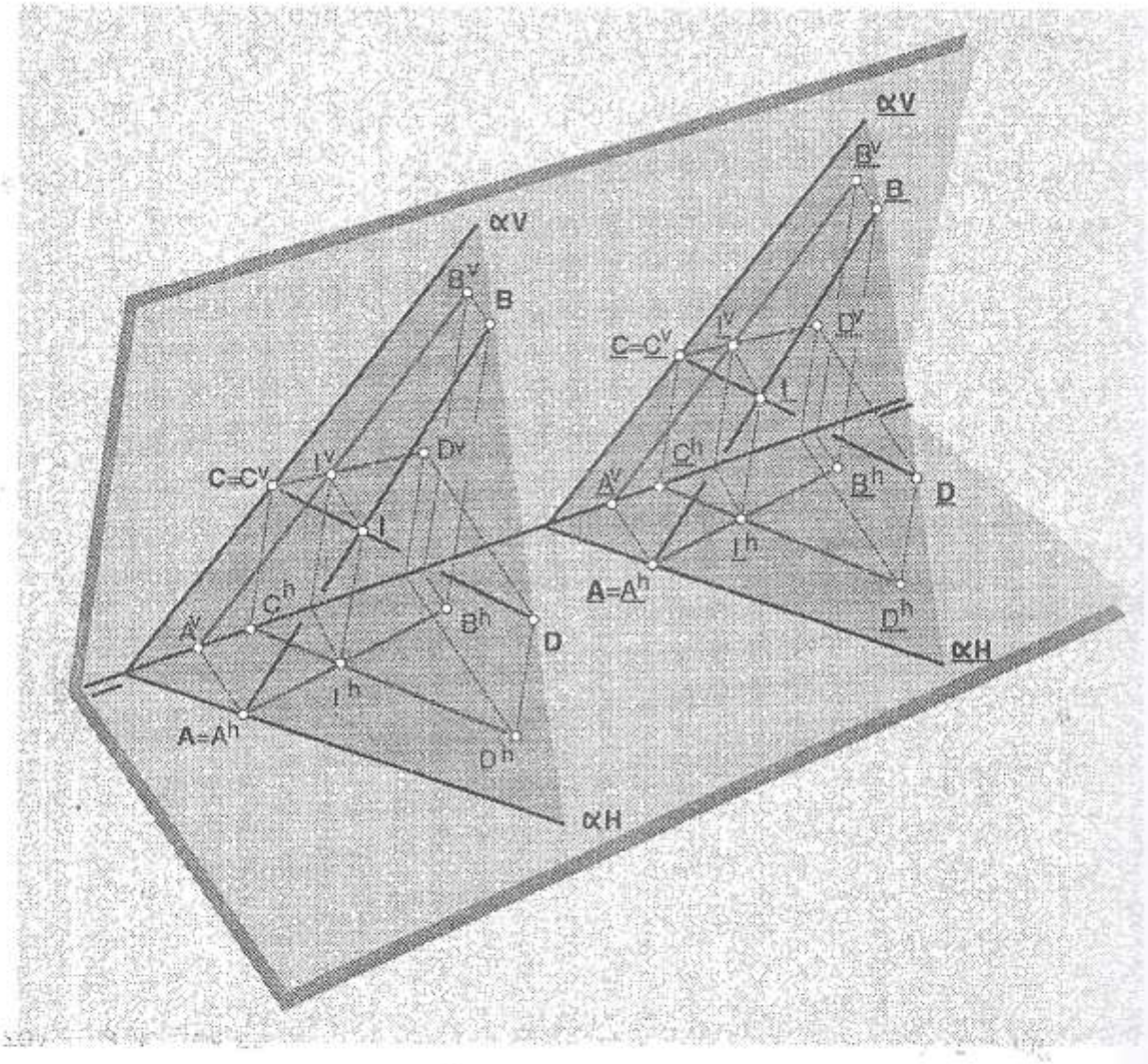


En la figura, la recta AB es paralela al Plano {α}, y esta relación se verifica a su vez

en la relación de paralelismo existente entre dicha recta y una recta del plano como lo es GF.

Debido a que en un plano pueden identificarse infinitas rectas con direcciones distintas, entendemos que por un punto exterior a él pueden pasar tambien infinitas rectas. De manera análoga, por un punto exterior a una recta pueden pasar infinitos planos paralelos a ella, todos los cuales se cortan en una recta común a ellos, que contiene al punto y es paralela a la recta considerada.

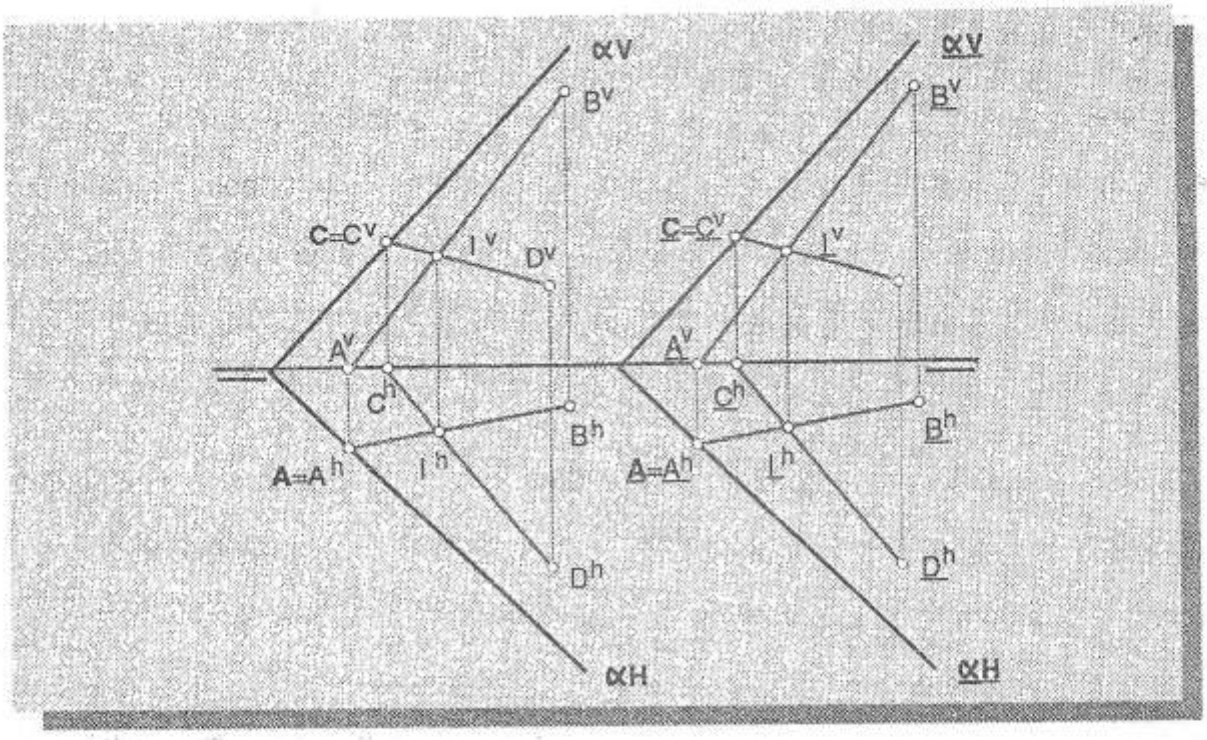
PARALELISMO ENTRE PLANOS



Para que dos planos sean paralelos entre sí debe cumplirse que dos rectas secantes de uno de ellos sean respectivamente paralelas a dos del otro.

Las figuras correspondientes nos ilustran esta relación, donde los planos {α} y {α}, paralelos entre sí, muestran como las rectas secantes "AB" y "CD" que definen al primero de ellos, son respectivamente paralelas a las dos secantes "AB" y "CD" que definen el segundo.

Consecuentemente, todas aquellas rectas pertenecientes a uno de los planos, son respectivamente paralelas a aquellas del otro plano que tienen posiciones semejantes.



Vea por ejemplo, el comportamiento mutuo de las trazas de ambos planos; "αH" es paralela a "αH", así como "αV" lo es a "αV". De hecho, toda vez que las respectivas trazas de cada uno de estos planos son dos rectas secantes, como tales también lo

definen, de modo que cuando dos planos paralelos son dados por sus trazas, dichas trazas son respectivamente paralelas entre sí.

Es obvio, por otra parte, que por un punto exterior a un plano puede pasar solo uno que le sea paralelo.

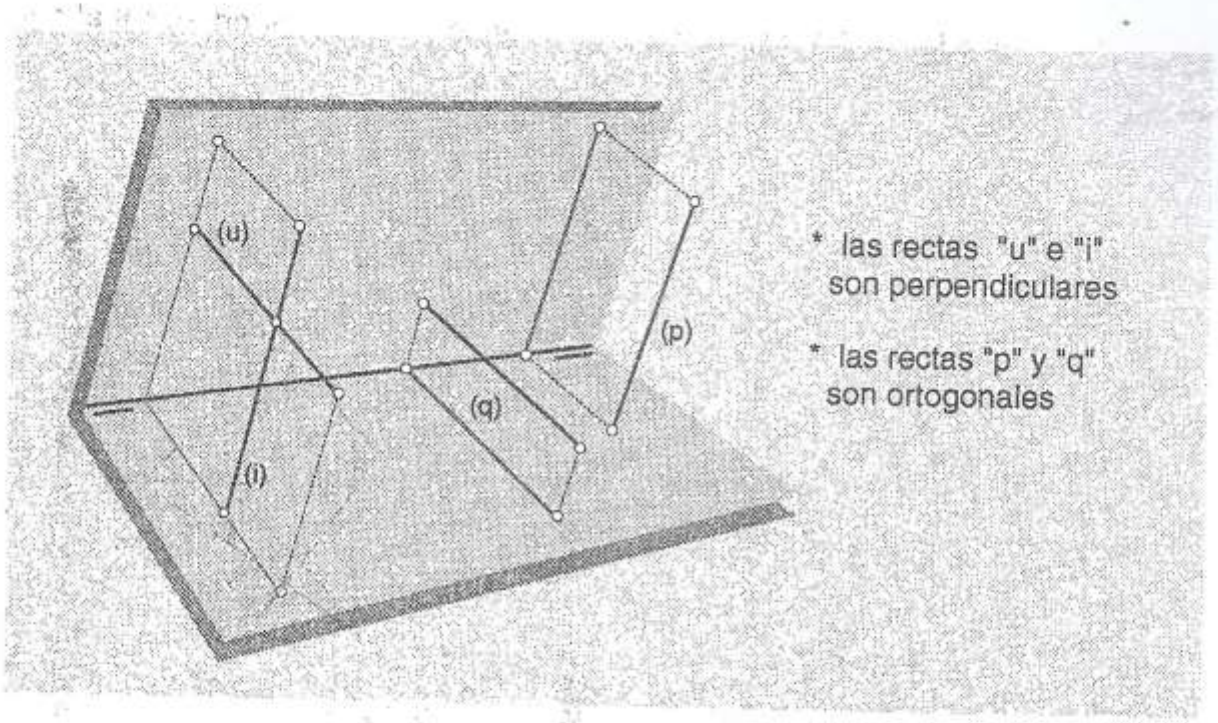
PERPENDICULARIDAD y ORTOGONALIDAD

En general, dos elementos geométricos son PERPENDICULARES entre sí, cuando se intersectan formando un ángulo de 90 grados.

Dos elementos geométricos son ORTOGONALES siempre que forman entre sí un ángulo de 90 grados .

La diferencia entre ambos conceptos consiste simplemente en que mientras la perpendicularidad considera la intersección entre los elementos geométricos como definitoria, no ocurre así con la ortogonalidad, que sólo apela a que la magnitud del ángulo formado por ellos sea 90° para que sean ortogonales entre sí, sin considerar si ellos se intersectan o no.

Es evidente que el concepto de Ortogonalidad envuelve al de Perpendicularidad, toda vez que todos los elementos que forman entre sí un ángulo recto, son ortogonales, mas no necesariamente perpendiculares. Esta diferencia se manifiesta particularmente cuando nos referimos a la relación entre las rectas, ya que en los otros casos no se puede percibir y se entiende fundamentalmente como una diferencia conceptual, como se diferencian la "masa" y el "peso" en el ámbito de la física .



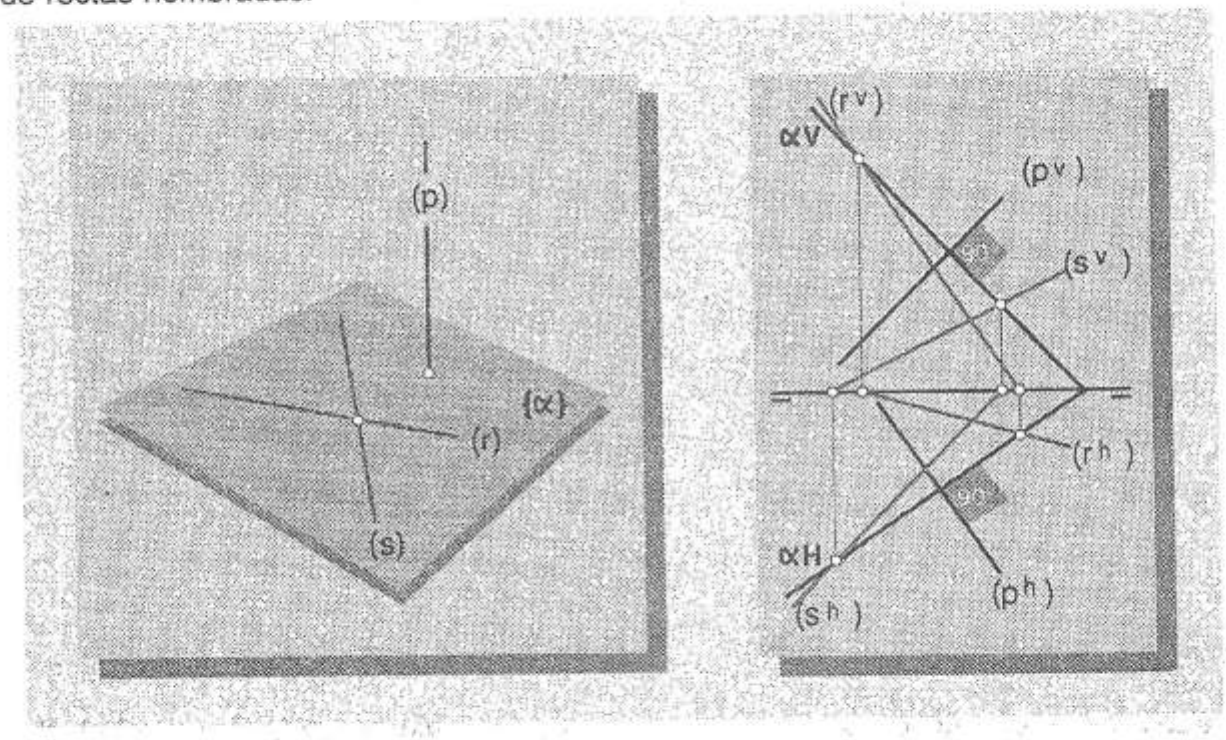
Si pensamos en dos rectas secantes que se intersectan bajo un ángulo de 90 grados, decimos que esas son dos rectas perpendiculares porque se cortan en ángulo recto. Pero...., ¿no son tambien ortogonales? Claro, sí lo son, porque forman entre sí un ángulo recto. Pensemos ahora en dos rectas que se cruzan, por ejemplo, una DE PIE y otra DE PUNTA con orígenes distintos. Ellas no se cortan pero forman entre sí 90 grados, por lo cual se dice que son ortogonales pero no perpendiculares. Así nos lo ilustra la figura que encabeza esta página.

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

La condición geométrica a través de la cual se verifica la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano establece que «para que ambos elementos geométricos sean perpendiculares entre sí es necesario que la recta sea perpendicular u ortogonal a dos rectas secantes del plano», como lo es en la figura siguiente la recta "p" con respecto a las rectas "r" y "s" que definen al plano {α}.

Toda vez que, de las infinitas rectas que contiene un plano, cualquier par de secantes (como "r" y "s") del plano {α}, es suficiente para definirlo en el espacio, la

figura espacial puede mostrarnos claramente como la recta "p" es ortogonal al par de rectas nombradas.

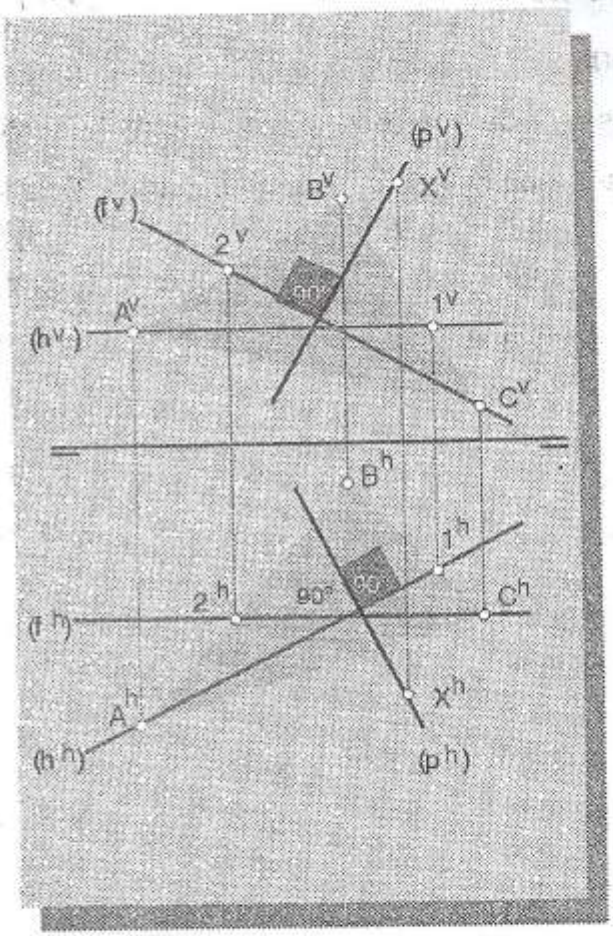


En doble proyección ortogonal, sin embargo, esta relación no puede ser expresada con respecto a cualquier par de rectas secantes, y en su lugar debemos recurrir a dos de sus rectas características, es decir, una FRONTAL y una HORIZONTAL con respecto a las cuales es fácil poner en evidencia dicha relación gracias a la PROPIEDAD PROYECTIVA DEL ÁNGULO RECTO, ya enunciada cuando tratamos los Angulos del Plano con los Planos de Proyección. En el ejemplo que acabamos de ilustrar, la figura diédrica nos muestra el plano {α} que aparece definido por sus trazas "αV" y "αH", y las respectivas proyecciones de la recta "p" formando ángulo recto con ellas.

Naturalmente, así como desde un punto exterior a un plano solo puede trazarse una recta perpendicular a él, desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar un plano perpendicular a ella.

Puede igualmente darse el caso de tener que trazar una recta perpendicular "p" desde un punto "X" exterior a un plano dado, por ejemplo, por tres puntos A, B y C.

Si estudiamos detenidamente la figura correspondiente al caso anterior, descubrimos cuán obvio es que la relación de perpendicularidad establecida entre la recta "p" y el plano {a} se evidencia gráficamente en DPO a través del ángulo recto que forman las respectivas proyecciones de la recta "p" con las de las rectas características del plano.



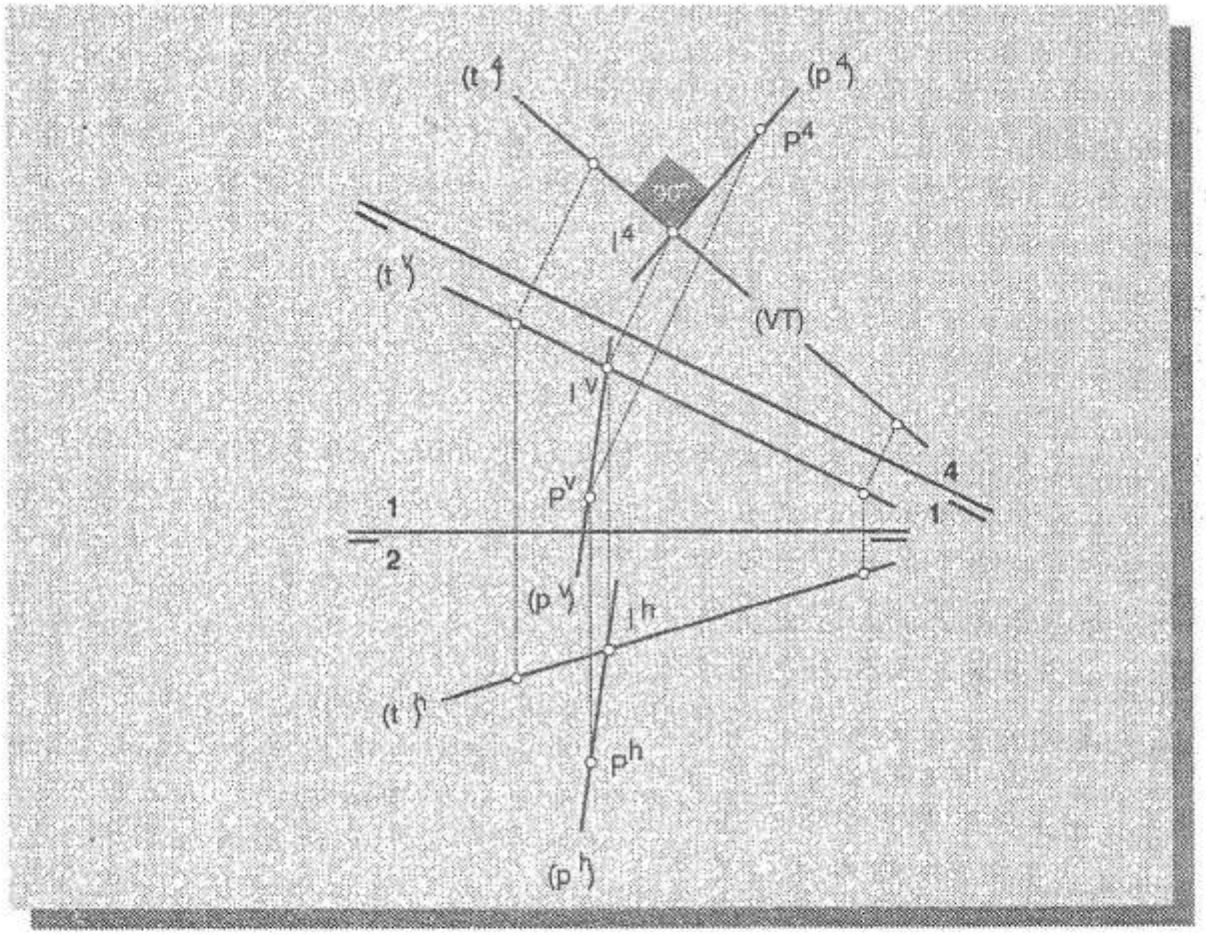
Con esta referencia a nuestro alcance podemos proceder a resolver nuestro problema. Como está indicado en la figura mostrada arriba, el primer paso a dar consiste en determinar dos rectas características ('h' y 'f') del plano "ABC", las cuales nos sirvan de referencia indicadora de las direcciones de las respectivas proyecciones de la recta "p", las cuales, al pasar por las imágenes correspondientes del punto "X", sean correlativamente perpendiculares a dichas rectas características. Explicar el resto del proceso es innecesario,

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

De acuerdo a lo que acabamos de señalar, dos rectas perpendiculares son dos rectas secantes que, consecuentemente, disfrutan de un punto común de intersección.

Es obvio entonces que por un punto exterior a una recta solo se pueda trazar una perpendicular a ella. Imaginemos el caso en el cual necesitamos establecer la posición de una recta perpendicular "p" desde el punto "P" hasta la recta "t". En la resolución de este problema podemos valernos de tres interpretaciones distintas.

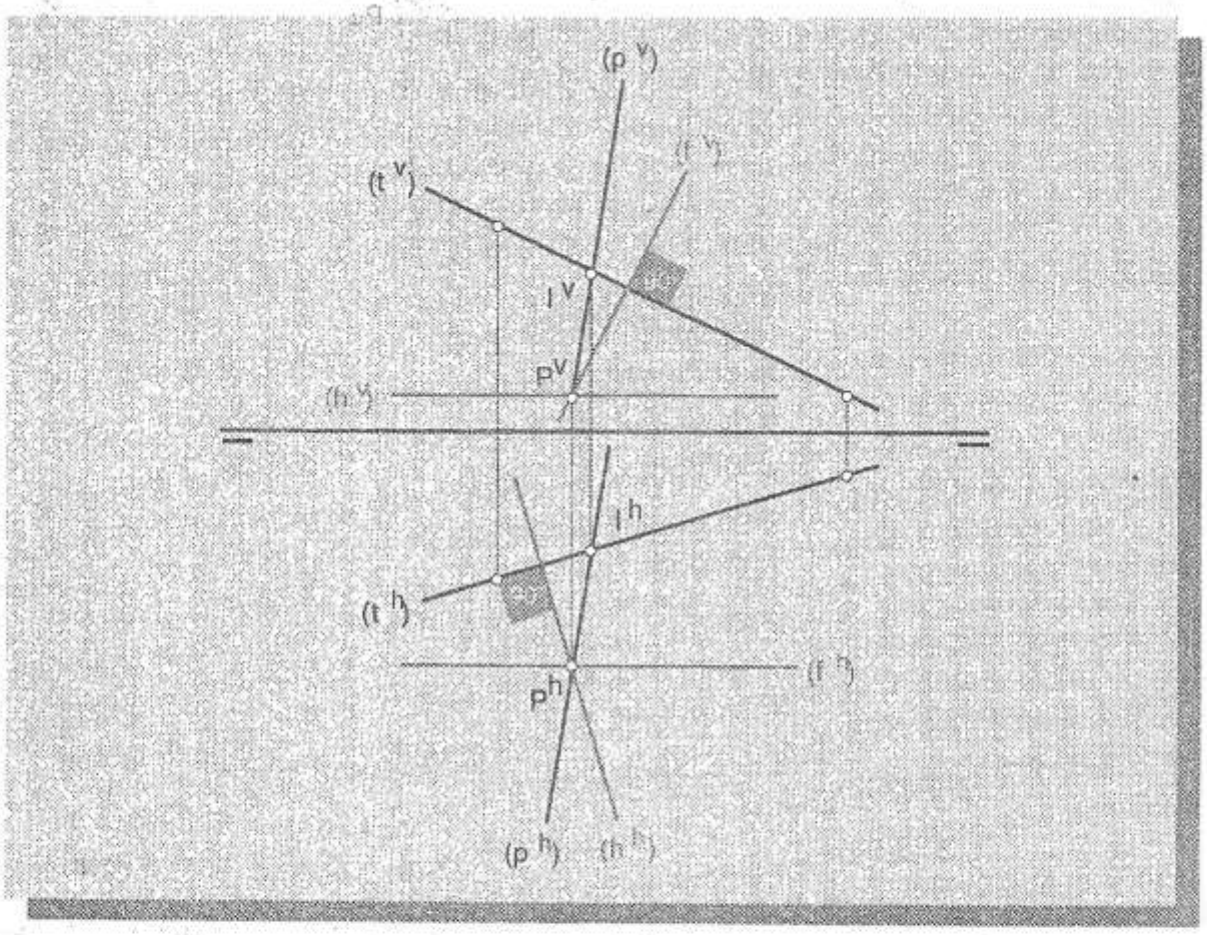
En primer lugar, visto el problema dentro de su contexto global, la propiedad proyectiva del ángulo recto puede acudir en nuestro auxilio. Sabemos que dos rectas que forman 90º muestran dicho ángulo en su magnitud verdadera cuando una de las rectas que lo determinan es paralela al plano sobre el cual proyecta su imagen.



Por lo tanto, tal como lo muestra la figura, si hiciéramos el cambio de planos LT 1/4, el cual nos permite ver a la recta "t" en la posición de Verdadero Tamaño "t^4",

podemos trazar —en esta nueva proyección "4"— una perpendicular "p^4" desde el punto "P^4" hasta la recta "t^4". Al encontrar el punto "I^4" de intersección de ambas rectas y trasladarlo al sistema principal, descubrimos que las proyecciones principales del segmento "P-I" representan a la recta buscada "p".

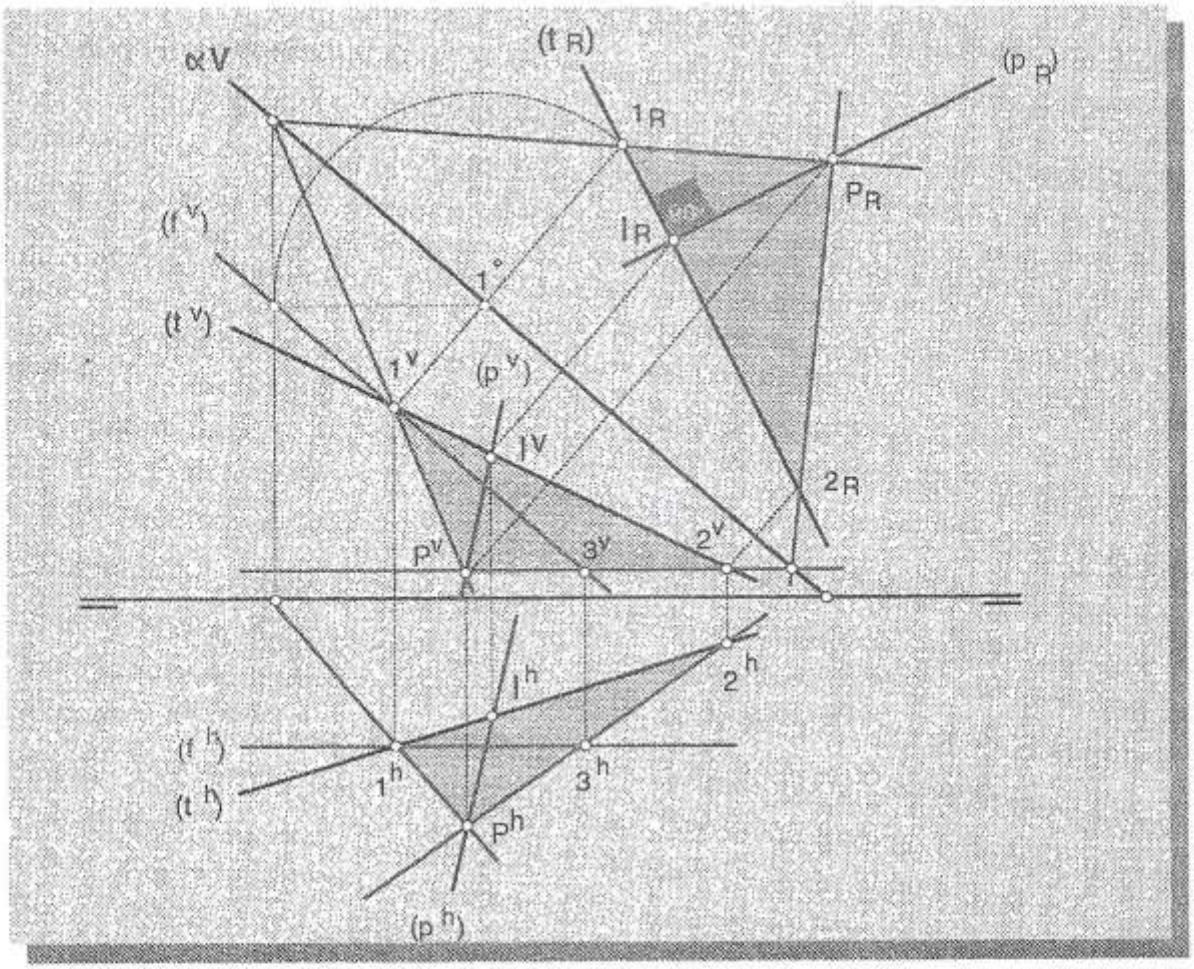
En segundo lugar, el problema puede ser visto exclusivamente en términos de la relación que guardan entre sí el punto y la recta. Por el punto "P" puede pasar un plano perpendicular a la recta "t", el cual representa el lugar geométrico de todas las rectas ortogonales a la recta "t". Es obvio que una de esas rectas al cortarse con dicha recta en el punto "I", se transforma en la perpendicular buscada.



De modo que si trazamos por el punto "P" un plano perpendicular a la recta "t" — el cual aparece definido en la figura por las rectas " f " y " h " — y buscamos la

intersección "I" entre ambos, llegamos a la misma solución, en la cual el segmento "PI" representa a la perpendicular "p". No pierda de vista que la relación de perpendicularidad entre la recta " t " y el plano " f-h " se expresa a través del ángulo recto que las respectivas proyecciones de "f" y "h" forman con las de la recta " t ".

La tercera forma de abordar este problema consiste en construir un triángulo cualquiera formado por el punto "P" y dos puntos "1" y "2" , escogidos al azar sobre la recta " t ", como lo muestra la figura siguiente.



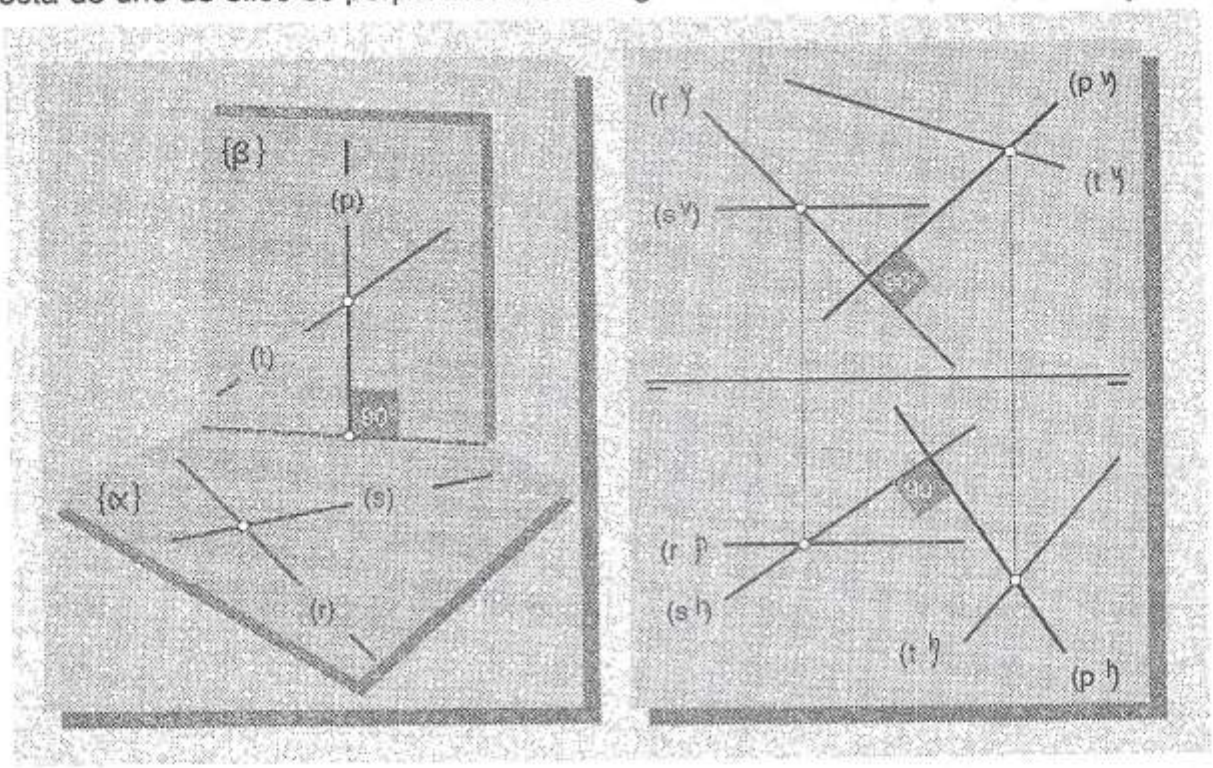
Al llevar dicho triángulo a una posición de Verdadero Tamaño —por ejemplo, mediante el rebatimiento— podemos trazar desde el punto "P_R" una perpendicular "p_R" a la recta "t_R", con la cual se intersecta en el punto "I_R". Al devolver dicho punto

de intersección a las proyecciones principales, nos encontramos nuevamente con el mismo segmento "PI" que expresa a la recta buscada.

Note bien que estas dos últimas alternativas se fundamentan en la relación directa que pueden establecer la recta "t" y el punto "P", a través de la perpendicular "p" trazada desde el punto a la recta, mientras que la primera se apoya en la cualidad proyectiva que ofrece el ángulo recto.

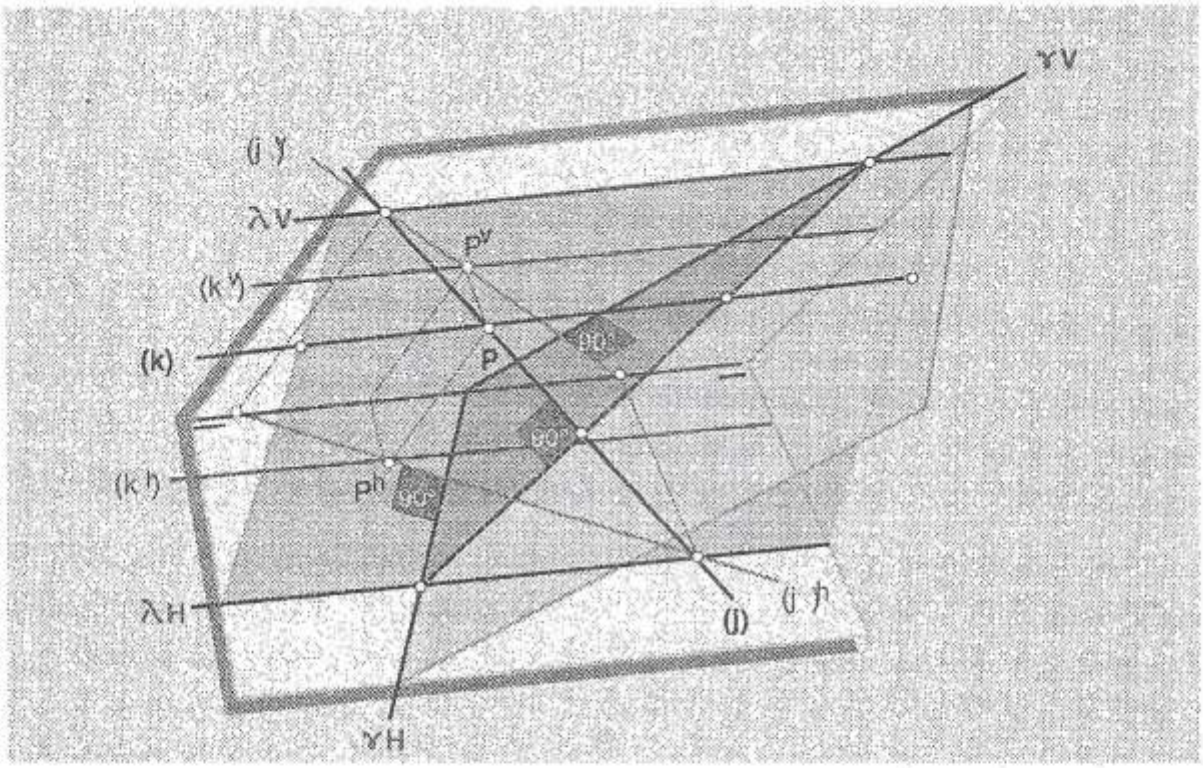
PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS

Desde el punto de vista geométrico, dos planos son perpendiculares cuando una recta de uno de ellos es perpendicular u ortogonal a dos rectas secantes del otro.



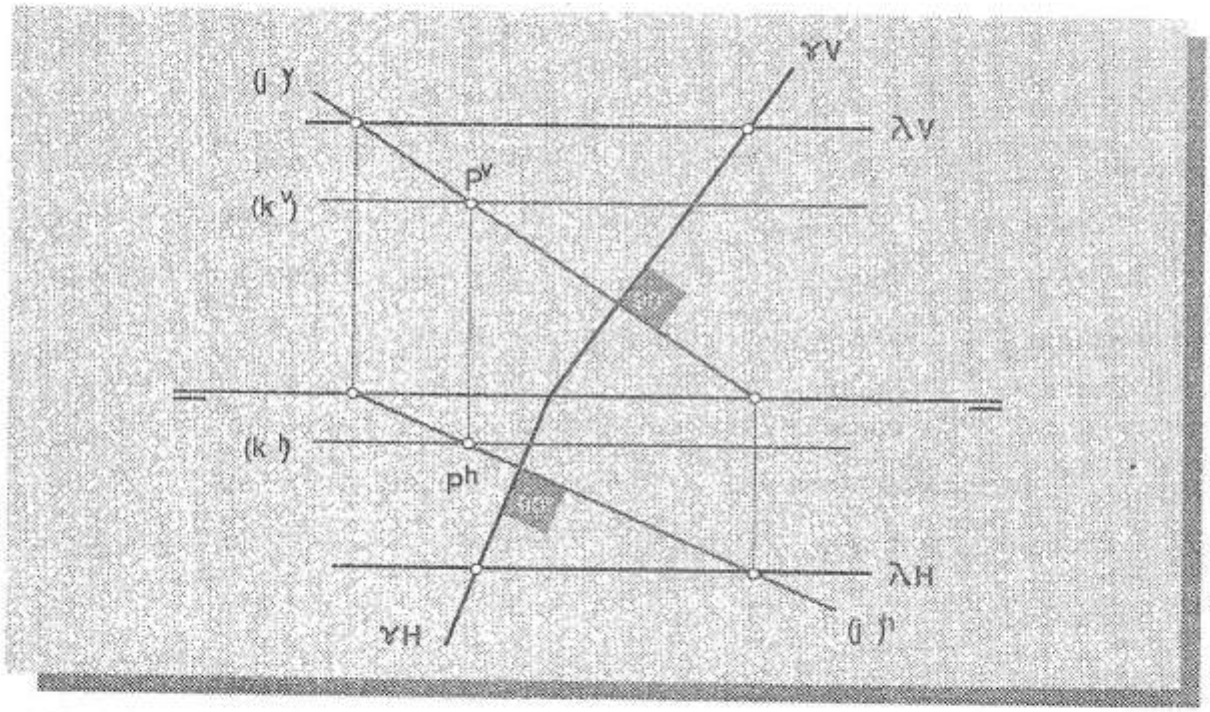
Estas figuras nos ilustran claramente esta situación donde el plano {α} (r-s) y el plano {β} (p-t) son perpendiculares en virtud de la relación de ortogonalidad establecida entre la recta "p" del plano {α} y las rectas "r" y "s" del plano {β}, la cual queda claramente evidenciada en DPO a través de los ángulos rectos que forman entre sí las respectivas proyecciones de las rectas mencionadas.

Es obvio que por un punto exterior a un plano pueden pasar infinitos planos perpendiculares a otro. De este modo, si tuviésemos necesidad de trazar por un punto dado como "P", un plano {λ} perpendicular a otro {ϒ} dado por sus trazas (ϒH y ϒV), deberíamos conocer al menos una condición que restrinja la solución del problema solo al plano buscado; por ejemplo, saber que dicho plano es paralelo a..., digamos, la Línea de Tierra. En este caso podemos trazar solo un plano que pasando por el punto "P", sea perpendicular al plano {ϒ} y paralelo a LT, tal como nos lo ilustran las figuras siguientes. Fíjese que dicho plano {λ} no puede definirse de otro modo que no sea a través de dos rectas como " j " y " k " , la primera perpendicular al plano {ϒ} y la segunda paralela a la Línea de Tierra.



No pierda de vista que el plano {λ}, al cual hemos definido a través de las rectas "j" y "k , es perpendicular al plano {ϒ}, porque su recta "j" es ortogonal a las rectas "ϒH" y "ϒV" de este plano, mientras que al mismo tiempo es paralelo a LT porque,

a su vez, su recta "k" es paralela a dicho elemento de referencia, como nos lo ilustran la figura espacial en la página anterior y la figura diédrica en esta misma página.



RELACIONES PARTICULARES ENTRE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS.

Las relaciones particulares conforman todas aquellas que se establecen de una manera exclusiva, es decir, donde no pueden participar mas que aquellos elementos que las comparten, usualmente —aunque no necesariamente— dos. Por ejemplo, cuando hablamos de las relaciones notables (perpendicularidad o paralelismo), nos referimos a condiciones que, si bien pueden involucrar a dos elementos geométricos, no necesariamente particularizan esa relación, puesto que, digamos, pueden haber muchos planos distintos paralelos a otro; pero, puede haber tan un solo plano que, pasando por un punto exterior a él, le sea paralelo. ¿Qué significa esto? Pués simplemente, que un nuevo factor entra en juego; es la DISTANCIA entre el punto considerado y el plano. Piense que todos los planos que

pueden ser paralelos a otro no se mantienen a la misma distancia de ése, sin embargo, de ellos, aquel que pasa por un punto es único y eso lo particulariza en su relación con el plano considerado.

Bajo este mismo razonamiento podemos someter la relación entre dos rectas secantes. ¿Cuantas rectas secantes a otra, que formen con ella un ángulo determinado, le pueden pasar por un punto exterior ? La respuesta es, obviamente, dos. En este caso, no solo es la distancia entre el punto y la recta lo que particulariza la relación geométrica; también lo es el ÁNGULO que forman entre sí la recta de referencia y sus dos posibles soluciones.

Aunque no todos los casos en los cuales participan las distancias y los ángulos respaldan nuestra argumentación, los ejemplos expuestos son suficientes para indicar el sentido de lo que, en contraste con una relacón notable, una relación particular significa.

DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia entre dos puntos está determinada por la magnitud del segmento que ellos forman. Así, para establecer esta magnitud, cuando no es evidenciada en Doble Proyección Ortogonal, se recurre a cualquiera de los procedimientos ya estudiados para encontrar el Verdadero Tamaño de segmentos.

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA.

La distancia entre un punto y una recta está determinada por el segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta, es decir, entre el punto y la intersección de la recta con la perpendicular que contiene la distancia considerada. Es obvio que, en aquellos casos en los cuales la recta se presenta en posición notable (De pié, De Punta, Horizontal, Frontal y Paralela a LT), la determinación de

la intersección puede alcanzarse directamente trazando la perpendicular a la recta con el apoyo de la propiedad proyectiva del ángulo recto.

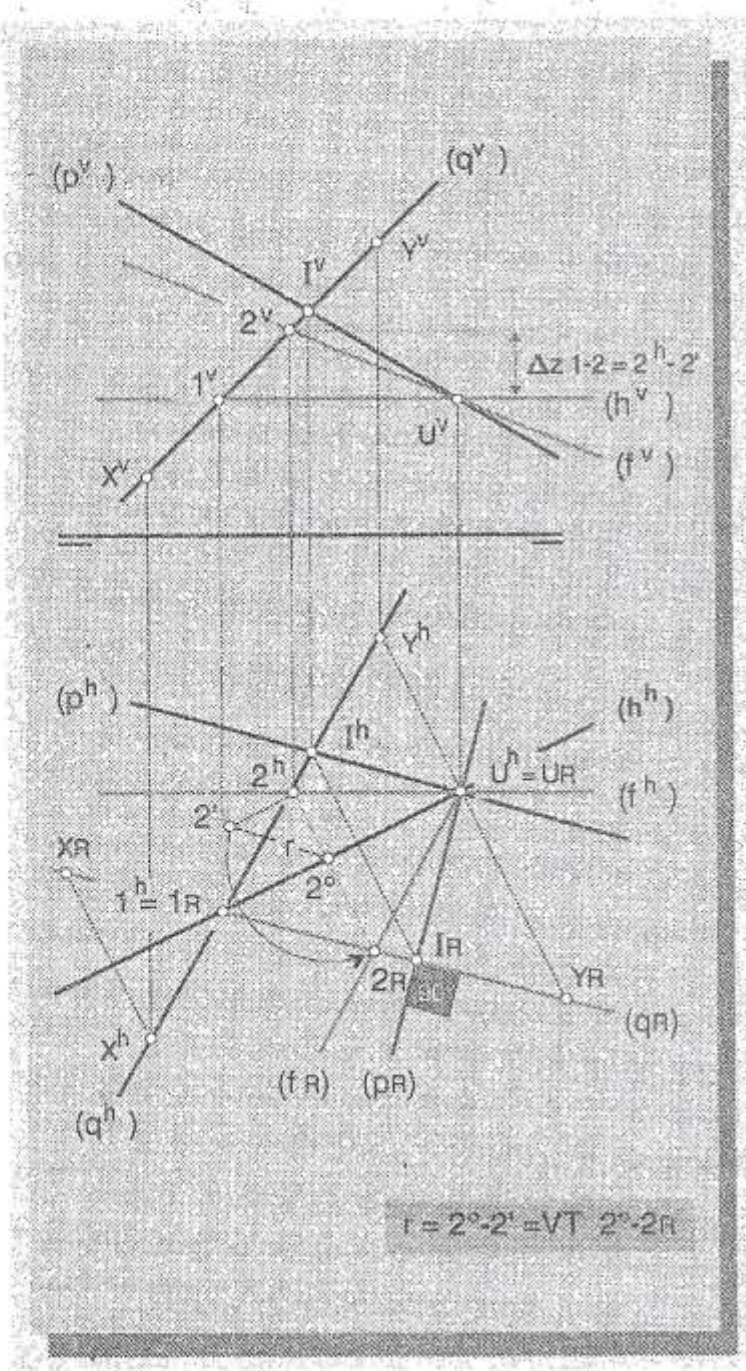
Cuando la recta es De Perfil o Cualquiera, establecer dicho punto de intersección, requiere la aplicación de uno cualquiera de los tres procedimientos que explicaremos a continuación, tomando como referencia en todos los casos los mismos elementos geométricos.

Toda vez que el punto y la recta determinan un plano, bastará con llevar ese elemento a una posición de Verdadero Tamaño, ya sea por Rebatimiento o por Cambio de Planos, y trazar —en esas condiciones— la perpendicular requerida, la cual contiene la distancia buscada en el segmento de recta comprendido entre el punto desde el cual se traza (U) y la intersección (I) de la misma con la recta (q).

1.- Primer caso.

El problema consiste en determinar las proyecciones (p^v) y (p^h) de la perpendicular trazada desde un punto "U" a una recta cualquiera " q ", definida por dos puntos ("Y" y "Z"). Su resolución aparece ilustrada en la figura siguiente, donde efectivamente configuramos el plano "U-q", el cual es sometido al rebatimiento para localizar, como se explica, la recta "p", la cual contiene en el segmento "U-I" la distancia buscada.

Observe cuidadosamente que las rectas características "f" y "h" del plano "U-q" parten de "U" y se cortan con la recta "q" , respectivamente en los puntos "2" y "1".

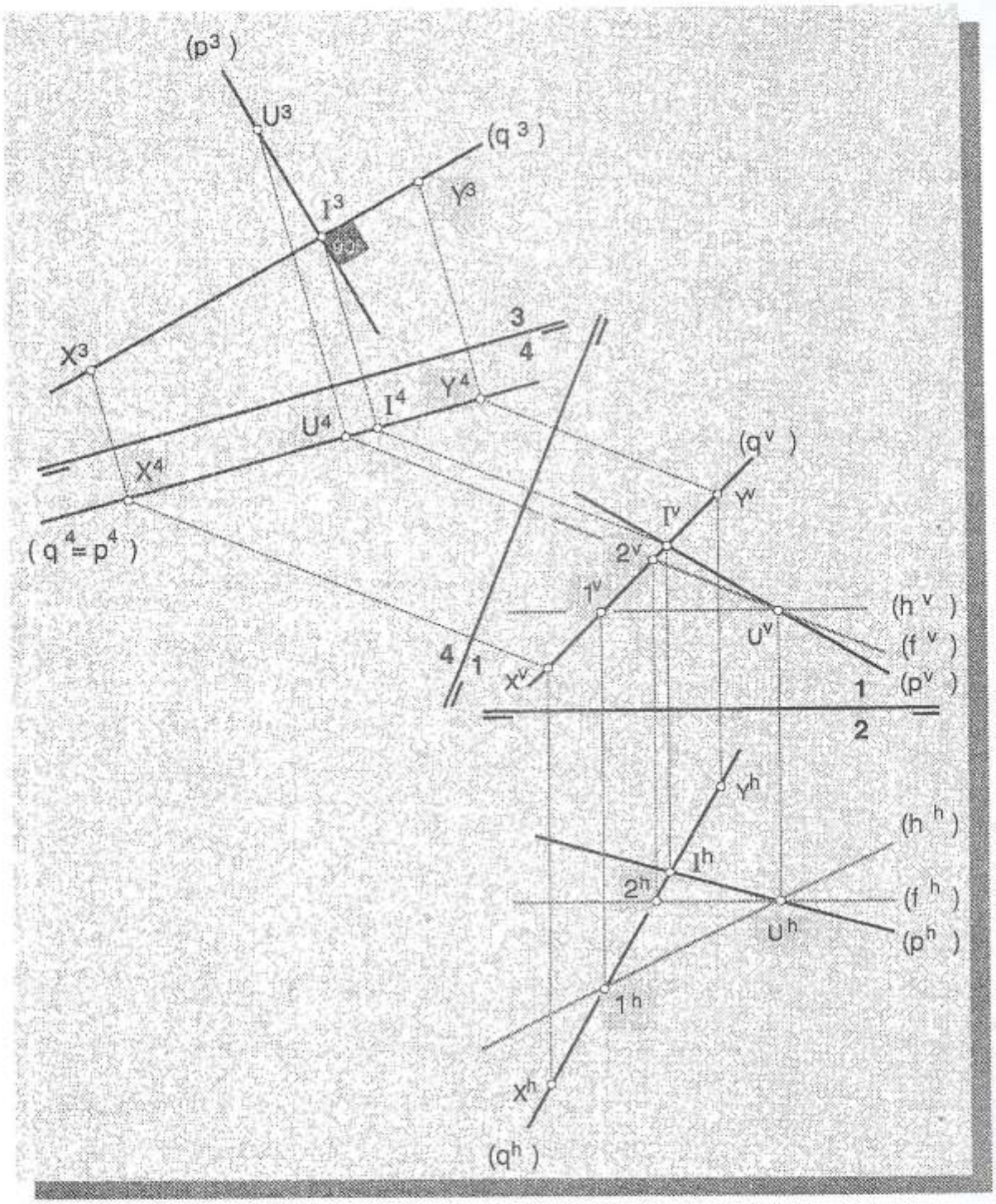


Al abatir el plano " U-q " alrededor de la charnela, representada por la proyección horizontal "hh"de la recta horizontal "h", lo llevamos a la posición de Verdadero Tamaño "1R-UR-2R", en la cual distinguimos a la recta "q" en la posición abatida "qR".
La recta "pR" representa la perpendicular trazada desde el punto "UR" hasta la recta "qR", con la cual se intersecta en el punto "IR", donde justamente el ángulo formado es 90°.
La recta "q" se obtiene en doble proyección ortogonal al referir el punto "IR" en primer lugar, a la recta "qh", que lo contiene en dicha proyección en la posición "Ih", y luego a la proyección vertical "qv" de dicha recta, que lo contiene en la posición "Iv".
Toda vez que la perpendicular buscada "p" está determinada por los puntos " U " e "I", su localización en ambas proyecciones consiste simplemente en unir las respectivas imágenes de dichos puntos, que la revelan definitivamente en las posiciones (pv) y (ph).
NOTA: Observe que al abatir alrededor de la charnela escogida, la diferencia de cota corresponde a " Δz 1-2", y no a la cota absoluta del punto "2" como hubiese ocurrido al abatir alrededor de la traza horizontal del plano.

2.- Segundo caso

Por otra parte, como lo muestra la figura de la página siguiente, el problema puede también resolverse al aplicar Cambio de Planos. Podemos someter su resolución a

la secuencia " LT 1/2 ---> LT 4/1---> LT 3/4 ", que nos permite llevar el plano "U-q" sucesivamente desde una posición CUALQUIERA (LT 1/2), hasta PROYECTANTE



HORIZONTAL (LT 4/1), y finalmente a una posición FRONTAL (LT 3/4), donde aparece en Verdadero Tamaño, y podemos trazar directamente la

perpendicular "p^4", cuya devolución a las proyecciones principales se ejecuta simplemente a través de las líneas de referencia correspondientes.

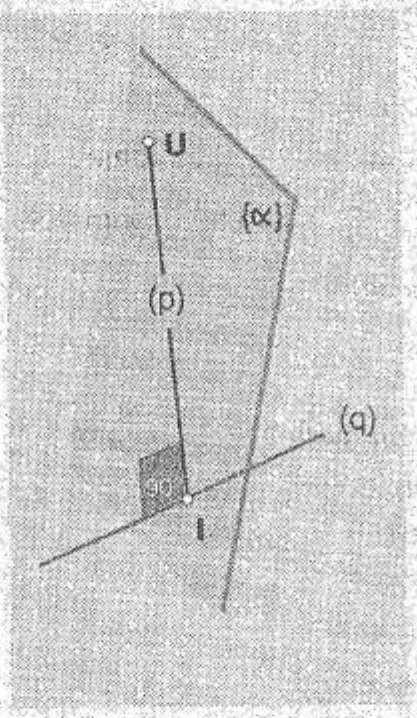
3.- Tercer caso

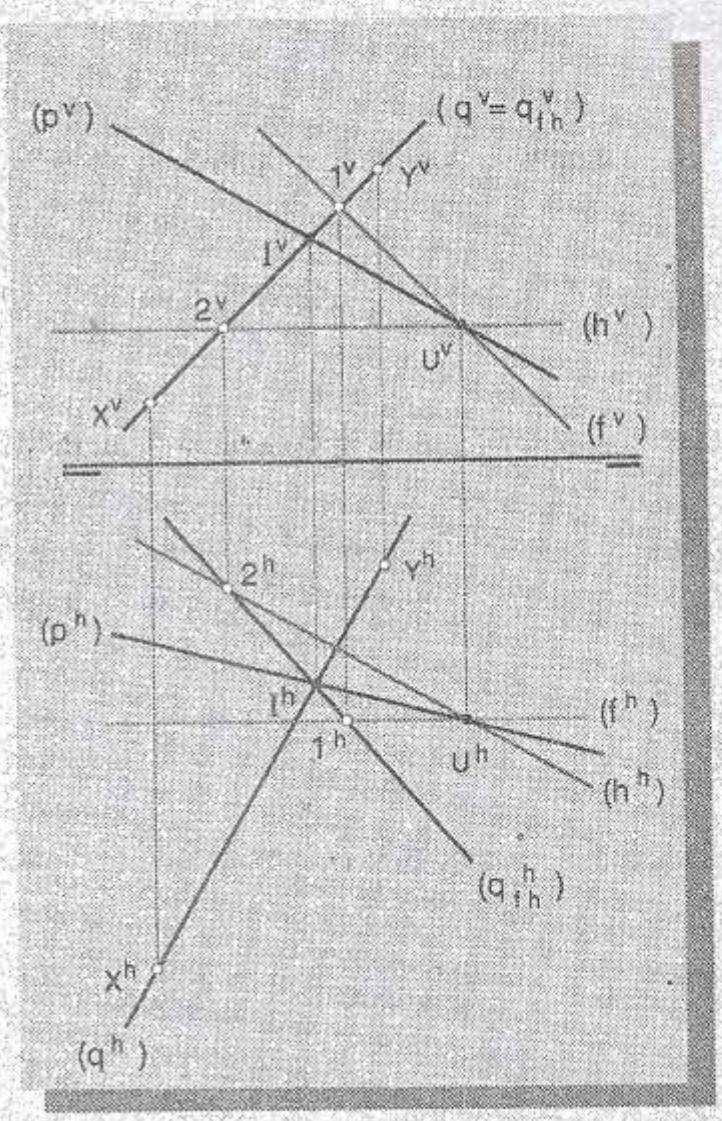
El siguiente procedimiento se fundamenta en la relación de perpendicularidad que se establece entre un plano que pasa por el punto, y la recta cuya distancia al punto se quiere determinar.

En el ejemplo que utilizaremos, ilustrado en la página siguiente, el punto de penetración " I " de la recta "q" en el plano {α} que pasando por el punto "U" es perpendicular a ella y está definido por las rectas características " f " y "h", permite establecer la posición de la recta "p", dentro de la cual, la distancia buscada está representada por el segmento "U-I" .

Si usted compara cuidadosamente los tres casos citados encontrará que los resultados coinciden con rigurosa precisión, y que la única diferencia entre ellos estriba, naturalmente, en el procedimiento aplicado.

Dentro del contexto de un problema complejo, determinar la distancia entre una recta y un punto, constituye tan solo un aspecto parcial de su resolución. En esas condiciones, la decisión de escoger alguno de los procedimientos explicados, depende fundamentalmente de la naturaleza del problema y de la estrategia general que se aplique. Como veremos mas adelante, si usted decidiera seleccionar el Cambio de Planos para resolver un problema de construcción de sólidos en el cual debe hallar una distancia semejante a la citada, no tiene sentido utilizar para ello el rebatimiento, porque seguramente el Cambio de Planos le ofrecería tal distancia en el camino a la determinación de las proyecciones del poliedro.





Al trazar por el punto "U", un plano perpendicular a la recta "q", lo definimos a través de sus rectas características " f " y " h " las cuales, para que se cumpla la relación de perpendicularidad establecida, deben formar 90° con las proyecciones respectivas de la recta "q".

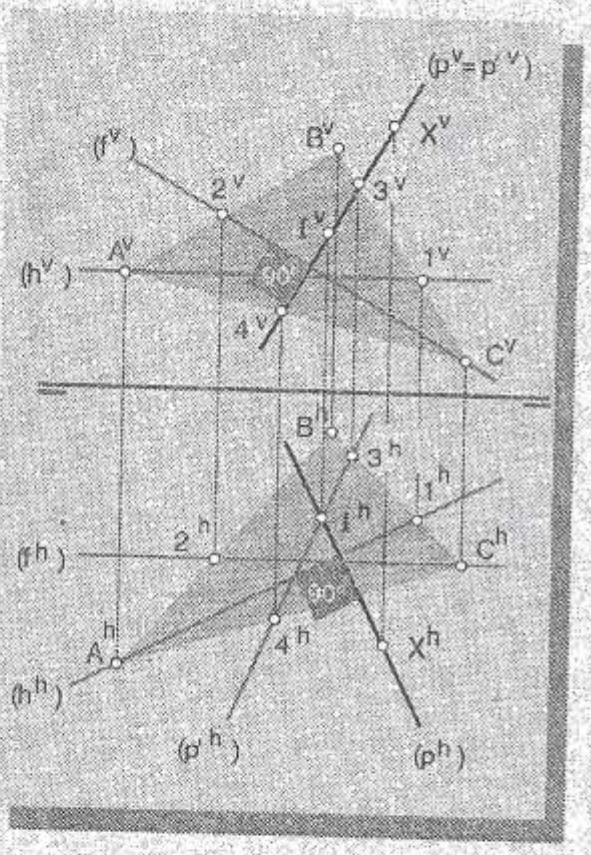
La localización del punto de intersección entre la recta "q" y dicho plano se ha logrado a través de la recta tapada "q fh" la cual, perteneciendo al plano definido por " f " y " h ", se confunde con la proyección vertical de la recta "q".

Dicha recta, al ser localizada en la proyección horizontal, nos permite hallar el punto de intersección "I" entre la recta "q" y dicho plano, punto que define junto con "U" la posición de la recta "p", perpendicular desde "U" hasta la recta "q".

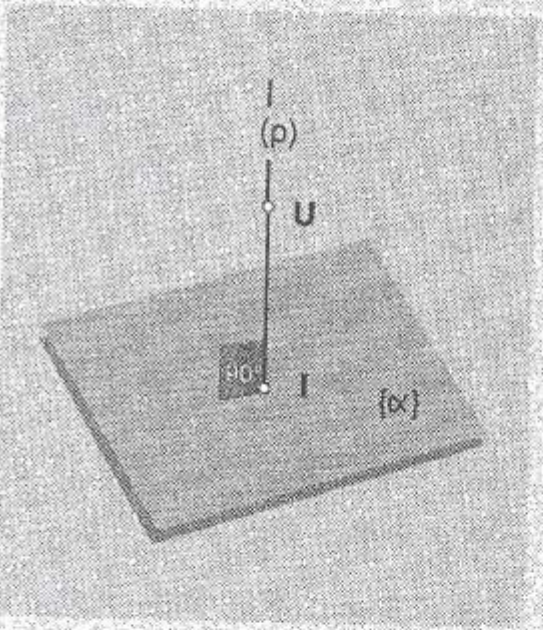
DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO.

La distancia entre un punto (U) y un plano {α} está determinada por el segmento de perpendicular (UI) comprendido entre el punto (U) y la intersección (I) de dicha recta con el plano. Del mismo modo que en el caso anterior, el abordaje de este problema puede efectuarse por distintas vías, en este caso dos, enmarcadas respectivamente dentro del método aditivo y el método integral.

La determinación de la distancia entre un punto "X" y un plano dado por tres puntos "ABC", apela al procedimiento ya visto oportunamente de trazar una perpendicular "p" desde un punto hasta un plano, de modo que en este caso es previamente necesario establecer la posición de dos rectas características " f " y " h " del plano "ABC", las cuales nos indican las direcciones correspondientes de las respectivas proyecciones de la perpendicular.

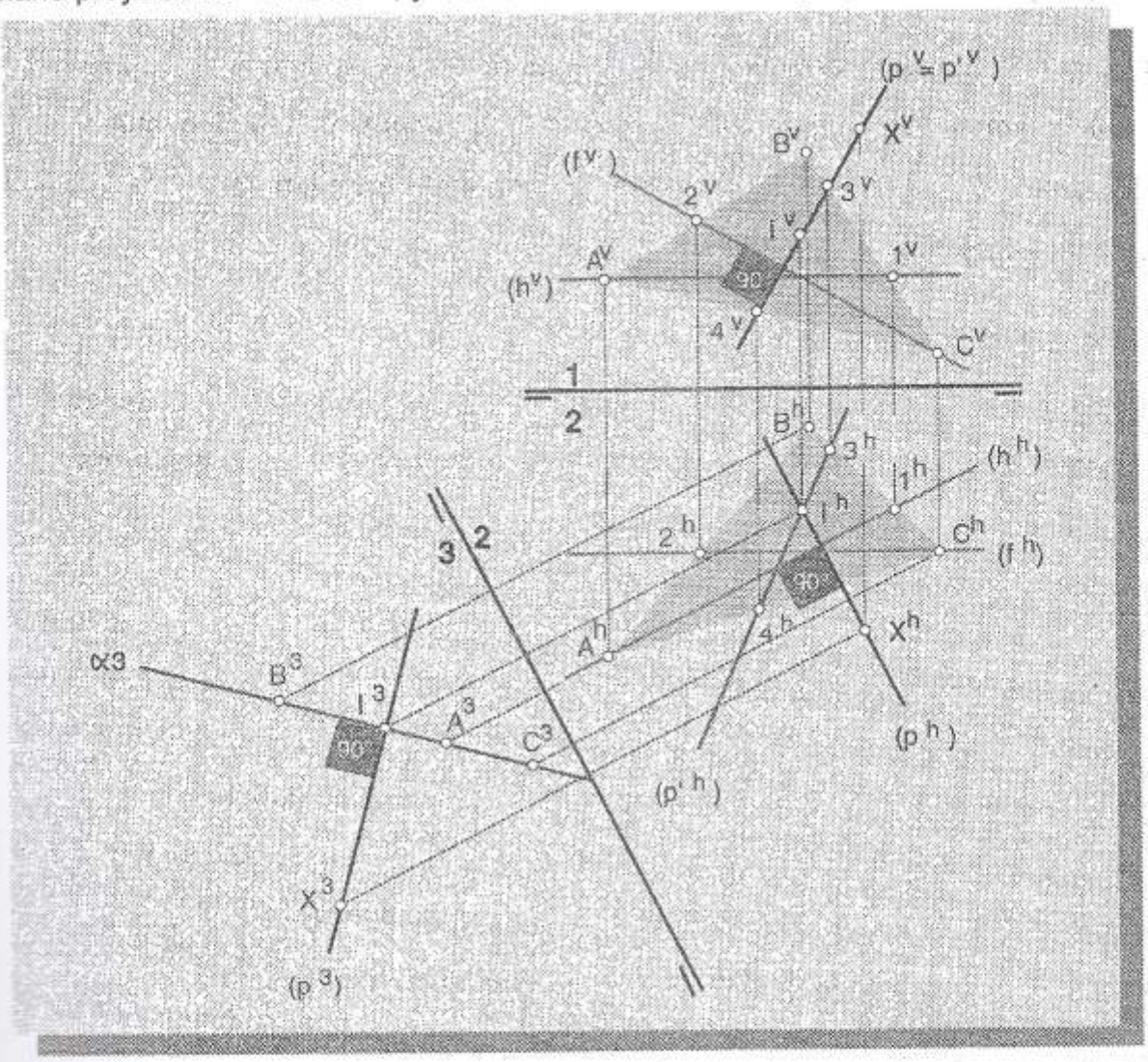


Por lo demás, la determinación del punto de intersección "I" entre los dos elementos se realiza por cualquiera de los procedimientos ya tratados.



La primera de ellas, explicada en la figura de la página anterior, se basa en aplicación del procedimiento general para trazar una perpendicular desde un punto hasta un plano y establecer su punto de intersección, procedimientos ya explicados oportunamente.

La aplicación del cambio de planos nos permite, al convertir el plano "ABC" en un plano proyectante " $A^3B^3C^3$ ", y trazar en forma directa la perpendicular " p^3 " para



hallar su punto de intersección " I^3 ", lo cual nos pone en presencia de la distancia entre el punto "X" y el plano "ABC", a través del segmento " X^3I^3 " el cual, además, se revela en Verdadero Tamaño.

DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS.

La determinación de la distancia en cada uno de estos casos supone la existencia de una relación de paralelismo entre los elementos involucrados, y se establece a través de una perpendicular —común a ambos— que los intersecta, y da lugar a un segmento comprendido entre dichos puntos de intersección, el cual expresa la distancia existente entre dichos elementos.

La aplicación de los procedimientos explicados en los casos anteriores se extiende, en los mismos términos, a la localización de dichas distancias, las cuales —mediante la aplicación del Cambio de Planos— quedan reveladas en su magnitud verdadera.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS.

La distancia entre dos rectas solo puede ser puesta en evidencia entre rectas que no comparten puntos comunes, es decir, entre rectas que no son secantes. En estas condiciones, entendemos que solo las rectas paralelas y las rectas que se cruzan en el espacio pueden ofrecernos esta posibilidad.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Cuando se trata de establecer la distancia entre dos rectas paralelas podemos llevar el plano que ellas determinan a una posición de Verdadero Tamaño, por cualquiera de los procedimientos conocidos, y por un punto escogido al azar trazar una perpendicular a ellas. El segmento de perpendicular comprendido entre sus respectivas intersecciones con las rectas paralelas nos permite conocer la distancia entre ambas directamente en Verdadero Tamaño.

Otra posibilidad consiste en determinar las proyecciones de un plano perpendicular a ambas rectas —trazado mediante rectas características— y establecer las

proyecciones de las respectivas intersecciones de dichas rectas con ese plano. El segmento comprendido entre dichos puntos de intersección expresa la distancia entre ambas rectas.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN. PERPENDICULAR COMUN.

La distancia entre dos rectas que se cruzan se localiza sobre una recta perpendicular a ambas —la PERPENDICULAR COMUN— la cual contiene dicha distancia en el segmento comprendido entre sus puntos de intersección.

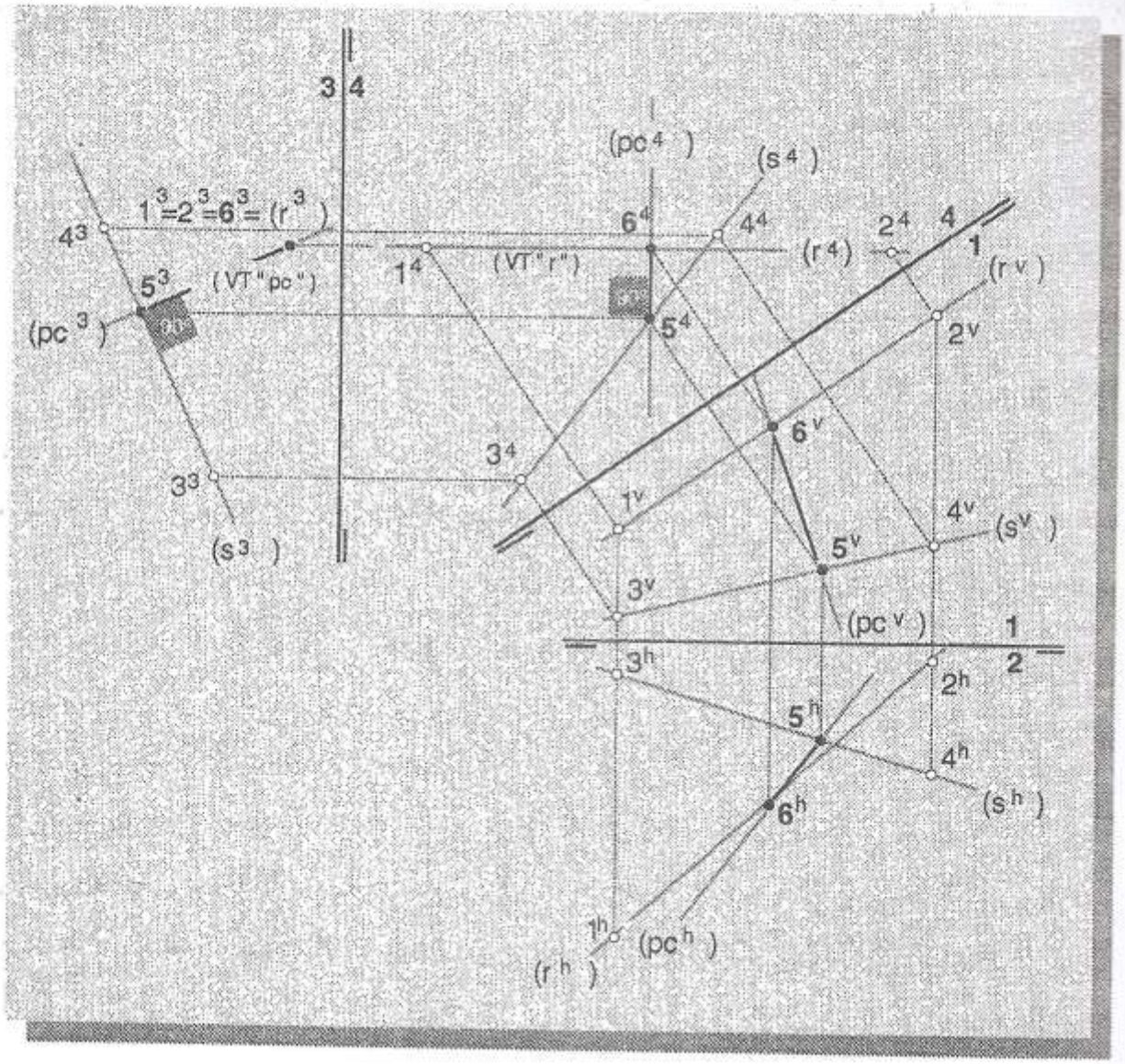
Para determinar la Perpendicular Común, se suele recurrir a uno cualquiera de dos procedimientos, cada uno de los cuales se acoge respectivamente a los métodos que hemos calificado como INTEGRAL y ADITIVO.

Método Integral.

La aplicación del método Integral a la determinación de la Perpendicular Común, se apoya en la propiedad proyectiva del ángulo recto, gracias a la cual se establece la posición de las nuevas Líneas de Tierra correspondientes a los respectivos cambios que experimentan los planos de proyección cada vez que nos movemos a una nueva posición en el espacio con respecto a los elementos geométricos en juego.

Notemos que en el ejemplo ilustrado a continuación, consideramos las proyecciones de dos rectas CUALESQUIERA [r (1,2) y s (3,4)], determinadas respectivamente por los puntos indicados, entre las cuales queremos determinar la distancia que las separa.

Es obvio que cuando estamos observando dichas rectas en el espacio, no las percibimos en posición de Verdadero Tamaño desde ninguna de nuestras posiciones principales de observación (1) y (2). Sin embargo, si "camináramos"



sobre el plano vertical y nos ubicáramos en una nueva posición (4) tal, que pudiéramos ver una cualquiera de las rectas, por ejemplo a "r" en Verdadero Tamaño, la nueva Línea de Tierra LT 4/1, quedaría ubicada en una posición paralela a la proyección vertical " r^v " de dicha recta, lo cual la convierte en una recta HORIZONTAL con respecto a ese nuevo sistema, tal como lo muestra la figura. Es obvio que en su nueva proyección " r^4 " , deberá mostrarnos la magnitud real del ángulo recto que ella forme con cualquier recta que le sea perpendicular, ya

que en dicha proyección ella se nos ofrece en Verdadero Tamaño. Por su parte, la recta "s" se sigue comportando como una recta CUALQUIERA con respecto al nuevo sistema LT 4/1.

Ahora imaginemos que el plano "4" se mantiene fijo en su posición, de manera que —como observadores— podemos "caminar" sobre él, y desplazarnos desde la posición de observación (1), hasta una nueva posición (3) en la cual nos colocamos de modo que nuestra línea visual se confunda con la recta "r". Cuando eso ocurre en el espacio, el plano vertical "1" se desplaza hasta una nueva posición "3", de suerte que la nueva Línea de Tierra LT 3/4 correspondiente a su intersección con el plano "4" , sobre el cual se ha desplazado, se ubica en una posición perpendicular a la proyección " r^4 ".

El nuevo sistema LT 3/4 recoge sobre el plano "3", las nuevas proyecciones de las rectas "r" y "s", de tal manera que "r" se nos ofrece, con respecto a dicho sistema, como una recta DE PIE, cuya nueva proyección " r^3 " se manifiesta como un punto que recoge sobre sí mismo las proyecciones de todos los puntos que pertenecen a dicha recta. Como podemos percibir, la recta "s" sigue manteniendo un comportamiento de recta CUALQUIERA con respecto a LT 3/4.

Ahora bien, si en el plano "3", la recta "r" se ve como un punto, cualquier otra recta que —como la Perpendicular Común— sea perpendicular a ella, deberá verse en posición de Verdadero Tamaño en dicha proyección, lo cual supone que cualquier otra recta como "s" que, a su vez, forme también un ángulo recto con aquella perpendicular, deberá necesariamente manifestar la magnitud real del ángulo de 90° en la proyección "3". Es por esta razón que en dicho plano "3" podemos trazar directamente la Perpendicular Común (pc) desde el punto "r^3" hasta la recta "s^3", formando directamente un ángulo recto.

En el plano "3" las intersecciones de la Perpendicular Común con las rectas "r" y "s", se han denotado respectivamente como "5^3" y "6^3", puntos que determinan el segmento que expresa la distancia existente entre las rectas consideradas.

La ubicación de dichos puntos en las proyecciones principales se lleva a cabo mediante su transporte a través de las líneas de referencia correspondientes. No obstante, la determinación de la proyección 6^4, debe establecerse con el apoyo de la propiedad proyectiva del ángulo recto, que nos permite trazar desde el punto 5^4 una perpendicular (pc^4) a la recta r^4 (VT "r").

Método Aditivo.

El Método aditivo, aplicado a la determinación de la Perpendicular Común, apela —como veremos seguidamente— a la utilización secuencial de varios de los procedimientos particulares que hemos visto a lo largo de este estudio.

Para ilustrarlo, vamos a partir de los mismos elementos de nuestro problema anterior. La necesidad de diferenciar cada uno de los pasos a dar nos sugiere la conveniencia de numerar ordenadamente la secuencia de resolución de la manera que explicamos seguidamente.

1.- Escoja un punto (I) al azar sobre una cualquiera de las rectas (s).

2.- Trace por él una paralela (r') a la recta "r" y determine el plano "r'-s" el cual, consecuentemente, es paralelo a la recta "r".

3.- Escoja otro punto (II) al azar sobre la recta "r".

4.- Trace por dicho punto una recta "p" perpendicular al plano "r'-s". (Previamente deberá determinar un par de rectas características "f" y "h" que permitan definir las respectivas direcciones de las proyecciones de la perpendicular "p").

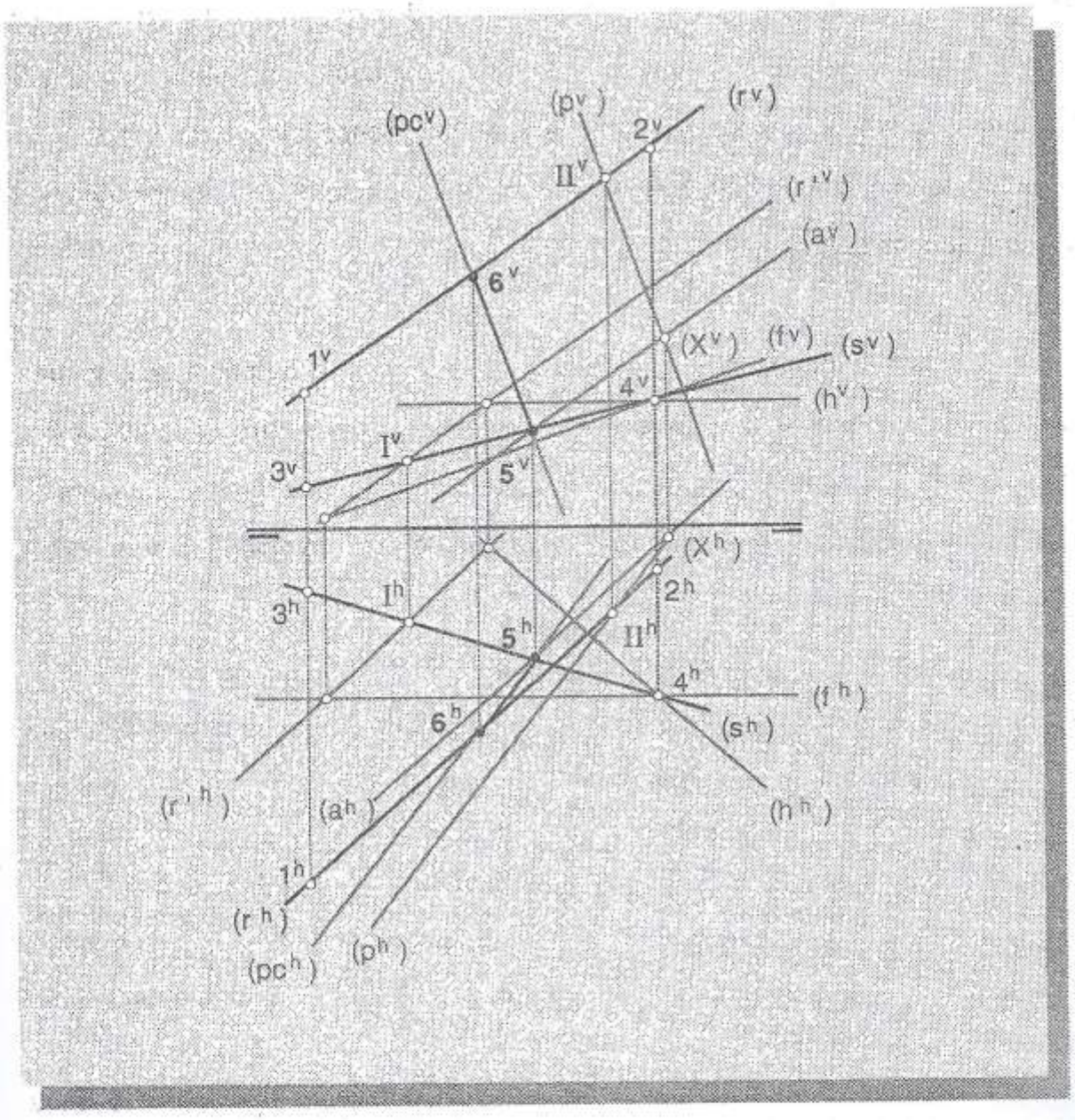
5.- Determine el punto de penetración " X " de dicha recta "p" en el plano "r'-s".

6.- Trace por el punto encontrado "X" una recta "a" paralela a la recta "r".

7.- Determine el punto " 5 " de intersección de la recta " a " con la recta " s "

8.- Trace por el punto " 5 " una recta (pc) paralela a la recta " p ".

9.- Determine el punto de intersección "6" entre la recta "pc" y la recta "r".



La recta "pc" representa la Perpendicular Común entre las rectas "r" y "s", y el

segmento determinado por los puntos " 5 " y " 6 " expresa la distancia entre ambas rectas.

ANGULOS

Un breve análisis comparativo de los distintos casos estudiados en la determinación de las DISTANCIAS, nos lleva a concluir que esta relación entre los elementos geométricos fundamentales, se establece invariablemente por intermedio de una recta perpendicular a dos de dichos elementos (excepción hecha de los casos en que interviene el punto), la cual siempre contiene la distancia que los separa.

No siempre, sin embargo, dos elementos geométricos en el espacio ocupan una posición relativa que permita determinar distancia alguna entre ellos. Veamos; ¿puede usted, por ejemplo, determinar la distancia entre dos rectas secantes, o entre dos planos ortogonales ? La sola figuración de esta intención ya nos resulta absurda, como de hecho lo es.

¿A través de cuál condición puede entonces establecerse una relación que califique las posiciones relativas de dos rectas secantes, o de dos planos ortogonales en el espacio? Es obvio que si expresamos la magnitud del ángulo comprendido entre ellas, estamos evidenciando un atributo común a ambas, el cual permite correlacionarlas en el espacio.

ANGULO ENTRE DOS RECTAS

El ángulo que dos rectas forman entre sí se mide sobre el plano que ellas determinan y su magnitud real se percibe al llevar dicho plano a una posición de *Verdadero Tamaño. Las posiciones relativas que pueden mantener dos rectas en*

el espacio, son semejantes a las que describimos cuando tratamos las rectas y los planos en los capítulos correspondientes; pueden ser paralelas, ortogonales u oblícuas, comprendiendo estas dos últimas aquellas que son secantes y las que tan solo se cruzan.

Ya sabemos que dos rectas paralelas mantienen la misma dirección en el espacio, por tanto forman un ángulo de cero grados (0°) y conservan entre ellas una distancia constante.

Dos rectas ortogonales pueden o no ser perpendiculares; en cualquier caso forman 90°, y sólo cuando se cruzan en el espacio, es posible determinar la distancia que las separa a través de la Perpendicular Común.

Dos rectas oblícuas en el espacio pueden o no, ser secantes, pero invariablemente, el ángulo entre ellas nunca será notable (0°, 90°), y tendrá un valor distinto que puede ser determinado, cuando las rectas son secantes, al llevar el plano que las contiene a una posición de Verdadero Tamaño.

Sin embargo, la determinación de la magnitud del ángulo que forman dos rectas oblícuas que se cruzan en el espacio solo puede llevarse a cabo utilizando una recta auxiliar que siendo secante a una de ellas sea tambien paralela a la otra. De esta manera el problema es reducido a determinar el ángulo entre dos rectas secantes.

ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

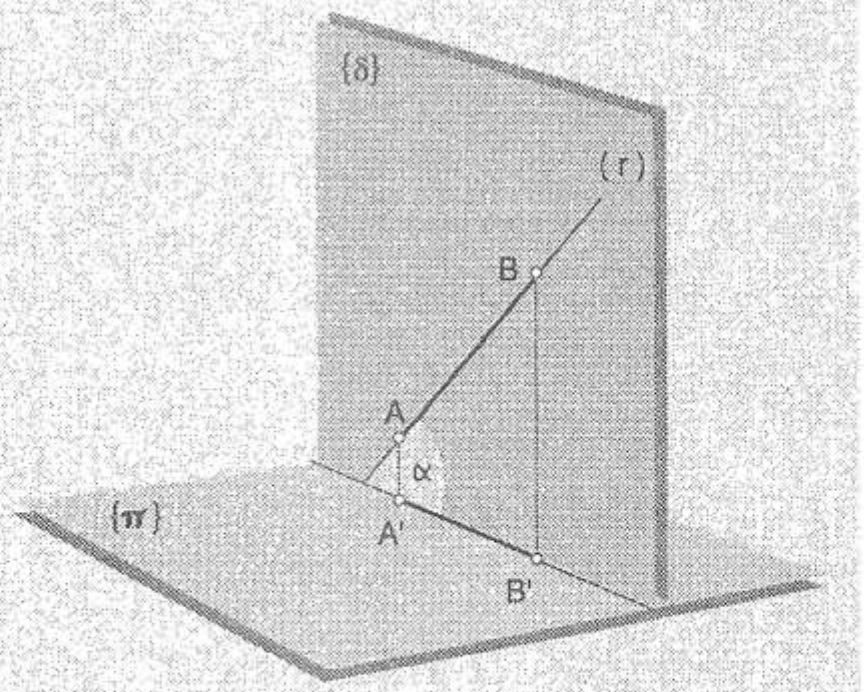
El ángulo que forman entre sí una recta y un plano es igual al que dicha recta forma con su propia proyección ortogonal sobre dicho plano. Recordemos que esta situación es típica de las rectas de Máxima Inclinación y Máxima Pendiente, las cuales miden los respectivos ángulos que forma el plano que las contiene con los

planos de proyección.

En Doble Proyección Ortogonal, entre otros procedimientos, la magnitud de dicho ángulo, suele establecerse llevando el plano que la contiene a una posición de Verdadero Tamaño mediante el Rebatimiento o el Cambio de Planos.

El ángulo "α" que forman entre sí la recta " r " (A,B) y el plano {π} es el mismo que dicha recta forma con su propia proyección ortogonal (A'B') sobre ese plano.

Dicho ángulo se mide sobre un plano {δ} que contiene a la recta " r " y es perpendicular al plano {π}. Podemos notar, además, que el ángulo "α" está comprendido entre la recta "AB" y la recta de intersección "i" entre los dos planos {δ} y {π}

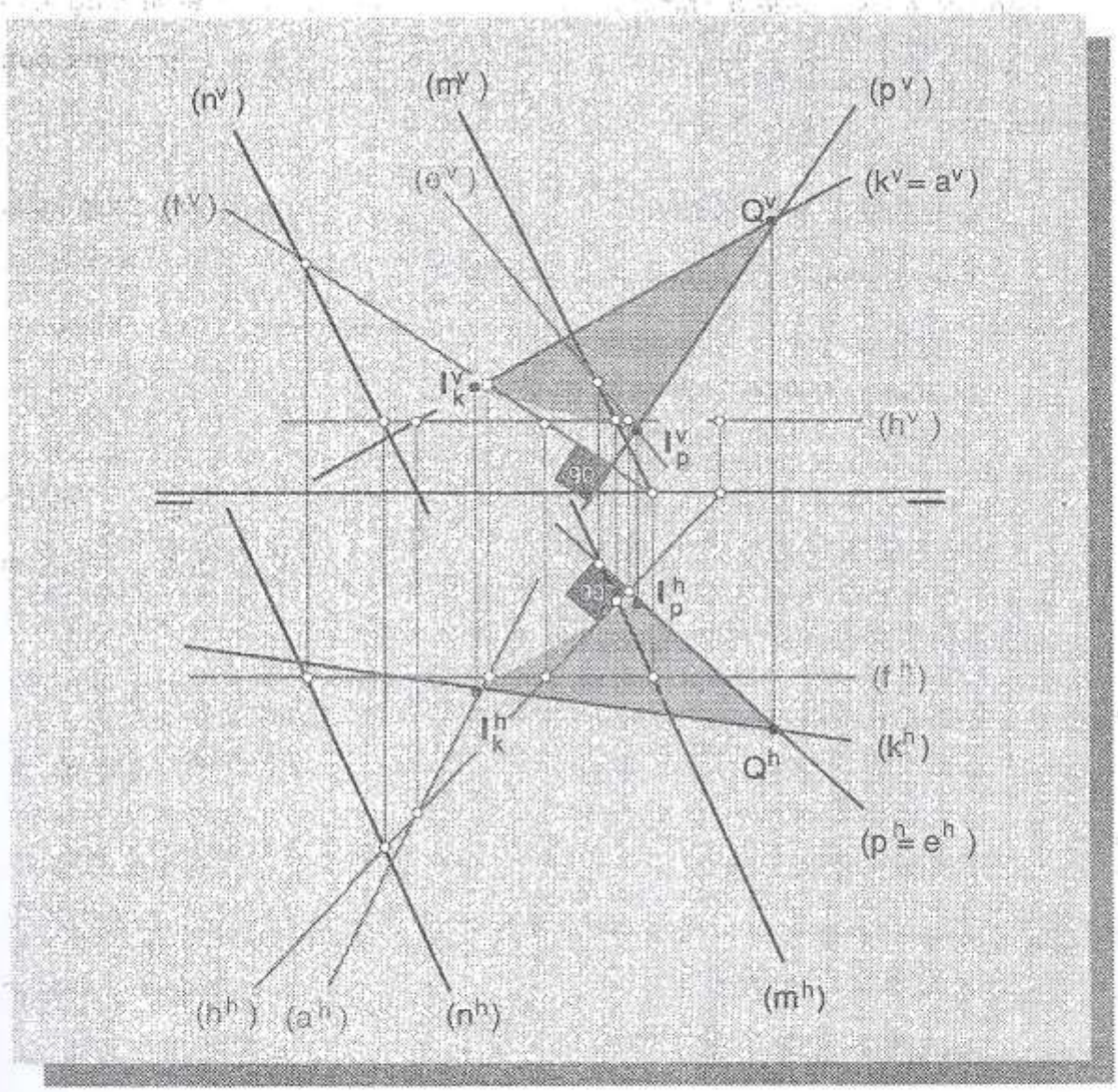


Veamos el siguiente ejercicio donde conocemos un plano dado por dos rectas paralelas "m" y "n", cuyo ángulo "θ" con una recta "k" —también conocida— queremos determinar.

Todos los procedimientos aplicables a la resolución de un problema de esta naturaleza parten de la necesidad de construir el plano que contiene al ángulo buscado, el cual invariablemente se define mediante la recta conocida (k) y una recta perpendicular (p) al plano trazada al azar por un punto cualquiera "Q" de la recta "k".

Una vez conocido este plano disponemos de diversas alternativas para determinar la magnitud del ángulo buscado:

1.- Penetrar las rectas "k" y "p" en el plano dado por las rectas "m" y "n", y definir los respectivos puntos de intersección "I_k" e "I_p". El triángulo rectángulo formado por dichos puntos y el punto "Q" es rectángulo en "I_p" y contiene el ángulo buscado en el punto "I_k". Al llevar este plano a una posición de Verdadero Tamaño, por cualquiera de los procedimientos conocidos, podemos acceder a la magnitud real del ángulo requerido.



En la figura de la página anterior, que nos ilustra esta situación, hemos trazado la perpendicular "p", valiéndonos de las rectas características "f" y "h" del plano {mn}. Los puntos de intersección "I_k" e "I_p" los hallamos respectivamente con la ayuda de las rectas tapadas "a" y "e".

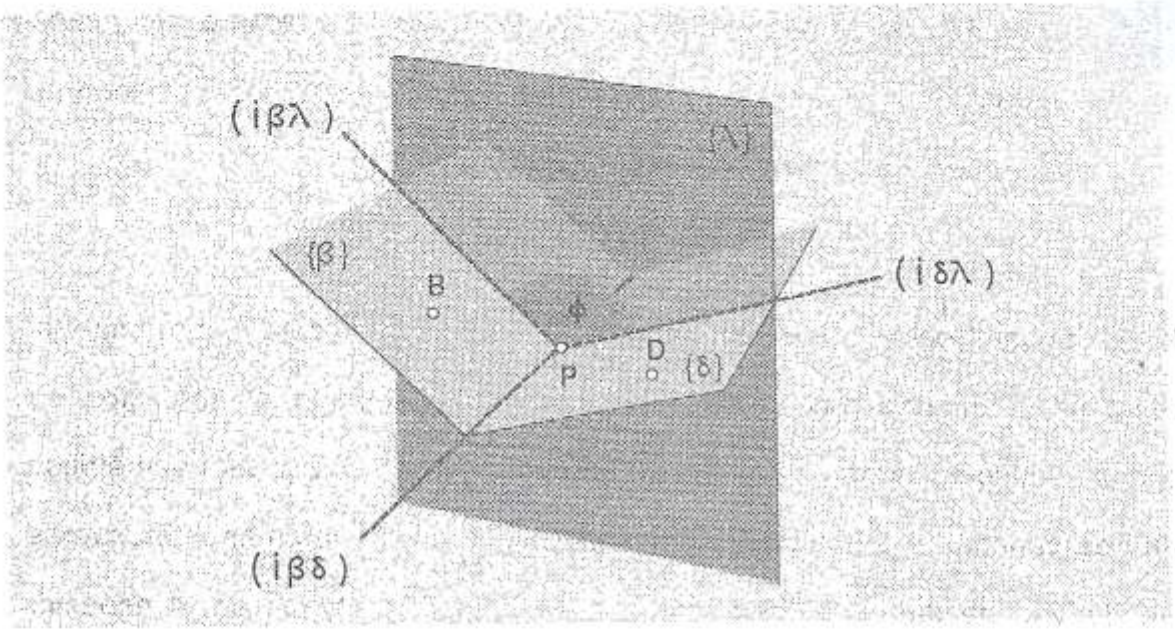
2.- Ejecutado el procedimiento anterior, una vez encontrado el triángulo "Q-I_k-I_p", podemos determinar independientemente los verdaderos tamaños de los tres segmentos que lo determinan y construir separadamente dicho triángulo en Verdadero Tamaño, lo cual nos llevará a conocer la magnitud real del ángulo buscado, el cual se encuentra entre los segmentos que comparten el punto "I_k".

3.- La mas sencilla alternativa se basa en la complementaridad del ángulo buscado y el ángulo formado en el vértice "Q", condición que se presenta en virtud de la pertenencia de dichos ángulos al triángulo rectángulo "Q-I_k-I_p". La determinación de "θ" consiste simplemente en trazar las proyecciones de la recta "p", y sin necesidad de establecer las proyecciones de los puntos de intersección "I_k" e "I_p", basta buscar la magnitud real del ángulo formado entre las rectas "p" y "k". La magnitud real del ángulo complementario al encontrado representa a "θ".

ANGULO ENTRE DOS PLANOS.

El ángulo entre dos planos está comprendido entre sus respectivas rectas de intersección con un plano perpendicular a la recta de intersección entre ambos.

La determinación de la magnitud de dicho ángulo se ejecuta llevando el plano que lo contiene a una posición de Verdadero Tamaño, mediante cualquiera de los métodos conocidos.



La realización de esta operación mediante el rebatimiento, exige determinar con antelación las respectivas rectas de intersección " $i_{\beta\lambda}$ " e " $i_{\delta\lambda}$ " de los planos "β" y "δ" con el plano auxiliar "λ", que se ha trazado por un punto arbitrario "P" de la recta de intersección " $i_{\beta\delta}$ " entre los planos dados. Es así que el plano "λ" pasa a ser reconocido a través de las rectas secantes " $i_{\beta\lambda}$ " e " $i_{\delta\lambda}$ " las cuales, en posición rebatida ofrecen la magnitud real de dicho ángulo "ϕ".

No obstante, al aplicar el Cambio de Planos no necesariamente se requiere determinar dichas intersecciones. Sabemos que cualquier plano puede definirse a través de una recta y un punto. En este caso, la recta de intersección " $i_{\beta\delta}$ " entre los dos planos sujetos a la determinación del ángulo es, naturalmente, común a ambos. Desde luego, ella puede compartir la definición de dichos planos acudiendo respectivamente a un punto de cada uno de ellos, como el punto "B" del plano "β" y el punto "D" del plano "δ". De esta manera, bastarán dos Cambios de Plano que nos permitan ver la recta de intersección " $i_{\beta\delta}$ " como un punto en la

última proyección. Las rectas respectivamente determinadas por dicho punto y cada uno de los puntos "B" y "D", revelan la magnitud real del ángulo "ϕ" buscado, el cual —como es obvio— está comprendido entre ellas.

LUGARES GEOMÉTRICOS

La idea de Lugar Geométrico ya es familiar para nosotros, puesto que al final del capítulo dedicado a la recta consideramos un problema inserto en su contexto. Los casos que involucran otros problemas donde intervienen los lugares geométricos son de una variedad extraordinaria. Entre ellos, algunos de los mas interesantes que se derivan de las relaciones entre las rectas y los planos en el espacio, apuntan hacia la búsqueda de las posibles soluciones a la determinación de las proyecciones de rectas que formando un ángulo dado con alguno de los planos de proyección, pertenecen a un plano dado.

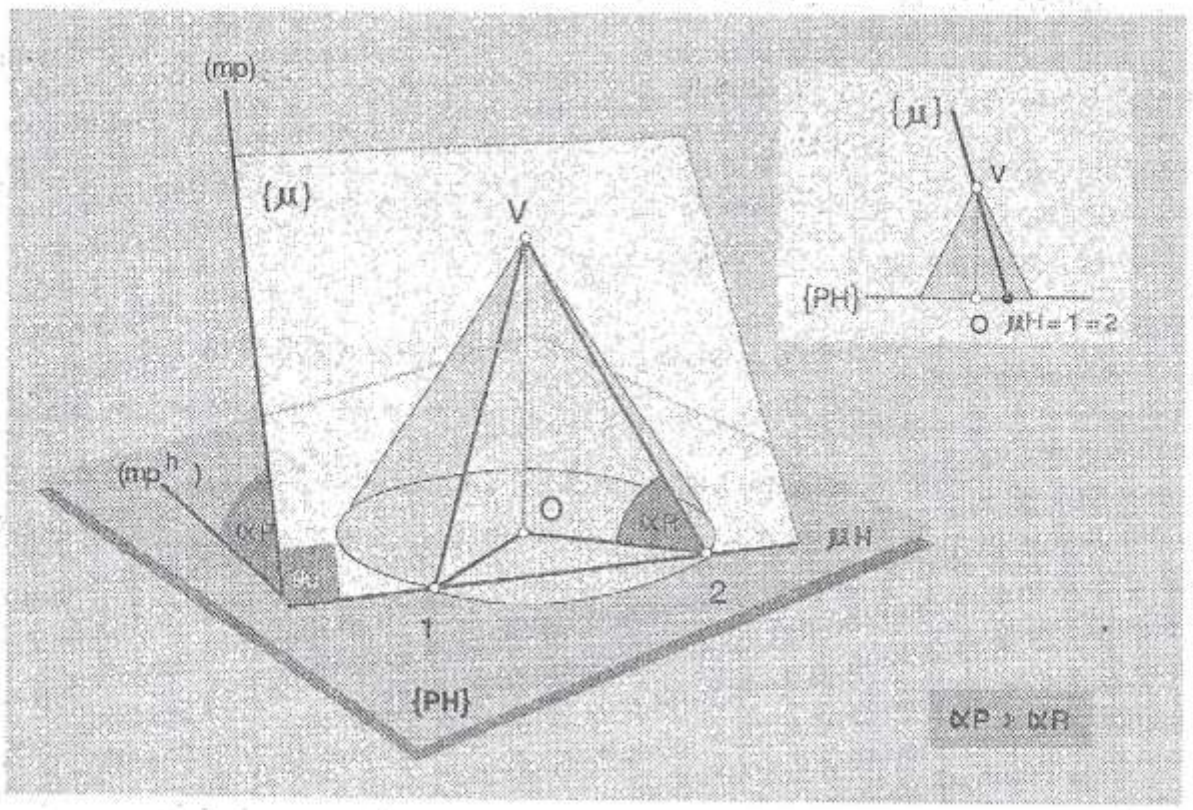
En el mismo orden se sitúa el problema inverso, que consiste en establecer las posibles proyecciones de aquellos planos que formando un ángulo dado con un plano de proyección, contienen una recta cuyas proyecciones son conocidas.

Ambos tipos de problemas, orientan la determinación de las soluciones posibles a partir de la comparación de las magnitudes de los ángulos que cada uno de los elementos en juego forma con el plano de proyección considerado. Es obvio que al proceder de esta forma solo tenemos acceso a tres situaciones posibles en cada uno de los casos señalados; o bien, el ángulo que la recta forma con el plano de proyección es mayor que el que forma el plano que la contiene ($\alpha_R > \alpha_P$), o ambos ángulos son iguales ($\alpha_R = \alpha_P$), o el ángulo de mayor magnitud es el que forma el plano ($\alpha_P > \alpha_R$).

DETERMINACION DE LAS PROYECCIONES DE RECTAS QUE FORMAN UN ANGULO CONOCIDO CON UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION Y ESTAN CONTENIDAS EN UN PLANO DADO.

CUANDO $\alpha_P > \alpha_R$

Vamos a indagar, en primer lugar, lo que ocurre cuando conocemos un plano en el cual queremos determinar rectas que, pasando por un punto conocido de él (V) forman un determinado ángulo, por ejemplo, con el plano horizontal de proyección, situación que nos ilustran las figuras espacial y diédrica que mostramos a continuación.



Supongamos, como nos lo muestra la figura , que nos dan un plano {μ} y un punto "V" que le pertenece, y nos piden determinar las proyecciones de las posibles rectas que pasando por "V" y perteneciendo al plano dado forman, por ejemplo, el ángulo $\alpha_R = 45°$ con el Plano Horizontal de Proyección.

Es obvio que el ángulo "α_P" que el plano {μ} forma con el plano horizontal de

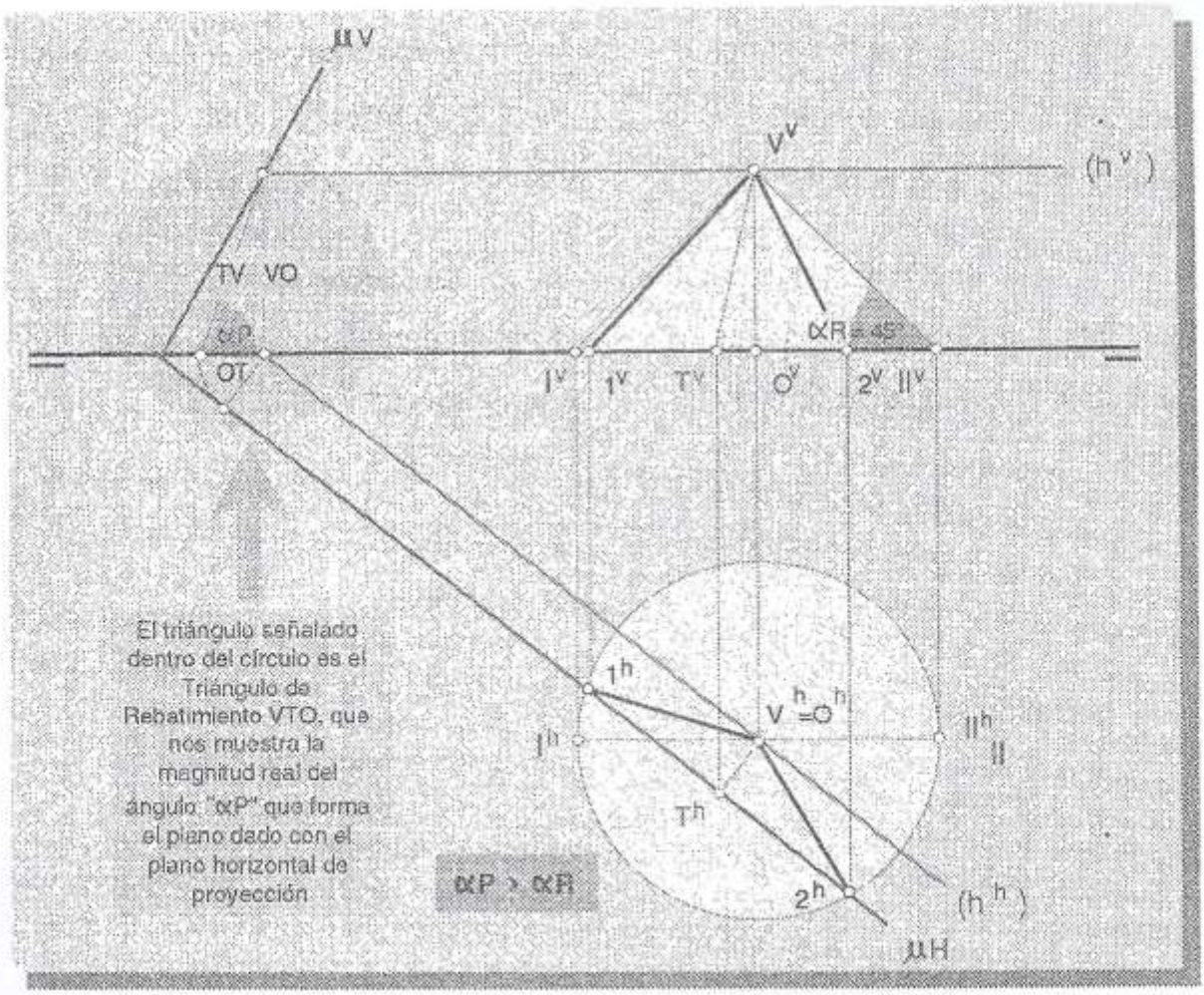
proyección {PH}, está expresado por su recta de Máxima pendiente (mp), la cual es, como sabemos, perpendicular a la traza horizontal "μH" del plano. Cualquier recta que pertenezca a ese plano, forma con el {PH} un ángulo comprendido dentro del rango que vá desde 0° hasta "α_P°", es decir, desde la recta HORIZONTAL hasta una cuyo máximo ángulo con el {PH} no puede exceder al de la recta de Máxima Pendiente "α_P", cuyo mismo nombre establece un límite a la magnitud del ángulo que las rectas del plano {μ} forman con {PH}. En este momento, conviene comparar las magnitudes reales de ambos ángulos para determinar en cual de los casos nos encontramos, y es obvio que se cumple que $\alpha_P > \alpha_R$.

Ahora bien, nosotros conocemos la posición del plano {μ} y del punto "V", porque ellos son datos del problema. Adicionalmente sabemos que la(s) recta(s) que buscamos, además de pasar por el punto "V", forma(n) un ángulo $\alpha_R = 45°$ con el plano horizontal, ... pero no nos dicen mas nada.

Es aquí, precisamente, donde apelamos al concepto de LUGAR GEOMÉTRICO. Ya señalamos con bastante anticipación el significado de este concepto que es oportuno recalcar. Un Lugar Geométrico es un conjunto infinito de puntos que cumplen una condición común. ¿Qué significa eso para nosotros en el contexto de este problema particular? Simplemente, que por el punto "V", pasa un conjunto infinito de rectas que forman el ángulo " $\alpha_R = 45°$ " con {PH}.

Ese conjunto de rectas que cumplen esa condición común, no son mas que las generatrices de un CONO DE REVOLUCIÓN, figura geométrica compuesta de un vértice "V" al cual concurren dichas generatrices, y de una base constituida por una circunferencia de centro "O" y radio "OT", que representa el conjunto de puntos de intersección de dichas generatrices con el plano horizontal de proyección. En la representación diédrica, la proyección vertical del cono se ve como un triángulo isósceles de vértice "V" cuyos ángulos en la base, la cual se confunde con la Línea

de Tierra, tienen una magnitud de 45°. Su proyección horizontal es una circunferencia de radio igual a "O-I" con cuyo centro "O^h" se confunde la proyección respectiva del vértice "V".



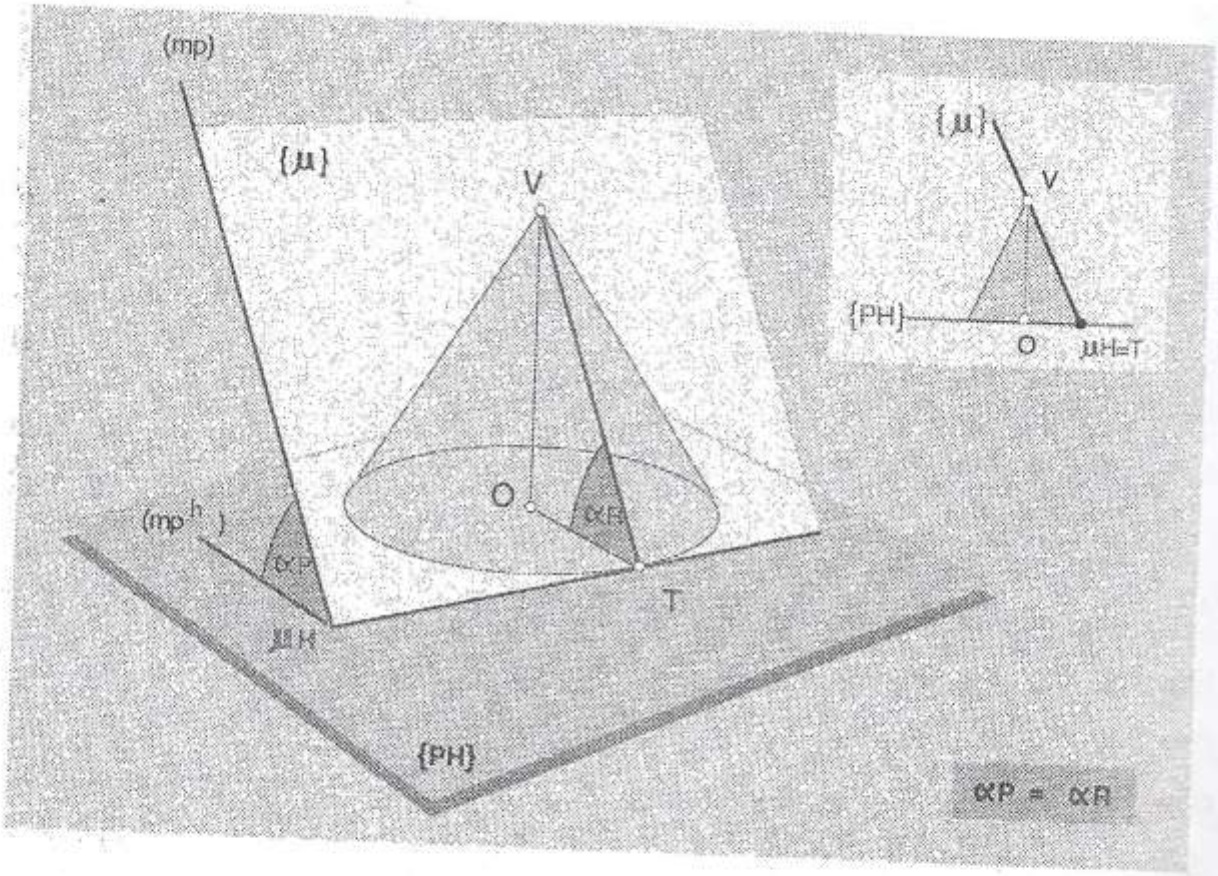
Ahora bien, de ese conjunto infinito de rectas, a nosotros tan solo nos interesa determinar la eventual existencia de aquellas que están contenidas en el plano que nos dieron. De la observación de la relación que establecen entre sí, la base del cono y la traza horizontal (µH) del plano dado —ambas contenidas en {PH}— descubrimos que dicha traza produce dos puntos de intersección (1 y 2) con la base del cono. Es obvio que si "V", "1" y "2" pertenecen por igual al cono y al plano, las generatrices "V1" y "V2" son rectas del plano que cumplen con la condición

requerida por nuestro problema. Ellas entonces representan dos posibles soluciones, que siempre tienen lugar cuando se cumple que $\alpha_P > \alpha_R$.

CUANDO $\alpha_P = \alpha_R$

La segunda posibilidad, ilustrada en la figura siguiente, se nos presenta cuando las magnitudes de los ángulos que ambos elementos forman con el plano horizontal es la misma, es decir, cuando se cumple que $\alpha_P = \alpha_R$.

En este caso es obvio que la solución pedida representa una recta de Máxima Pendiente del plano, en cuyo caso no es necesario proceder mas que a establecer las proyecciones de aquella que pasa por el punto dado "V".

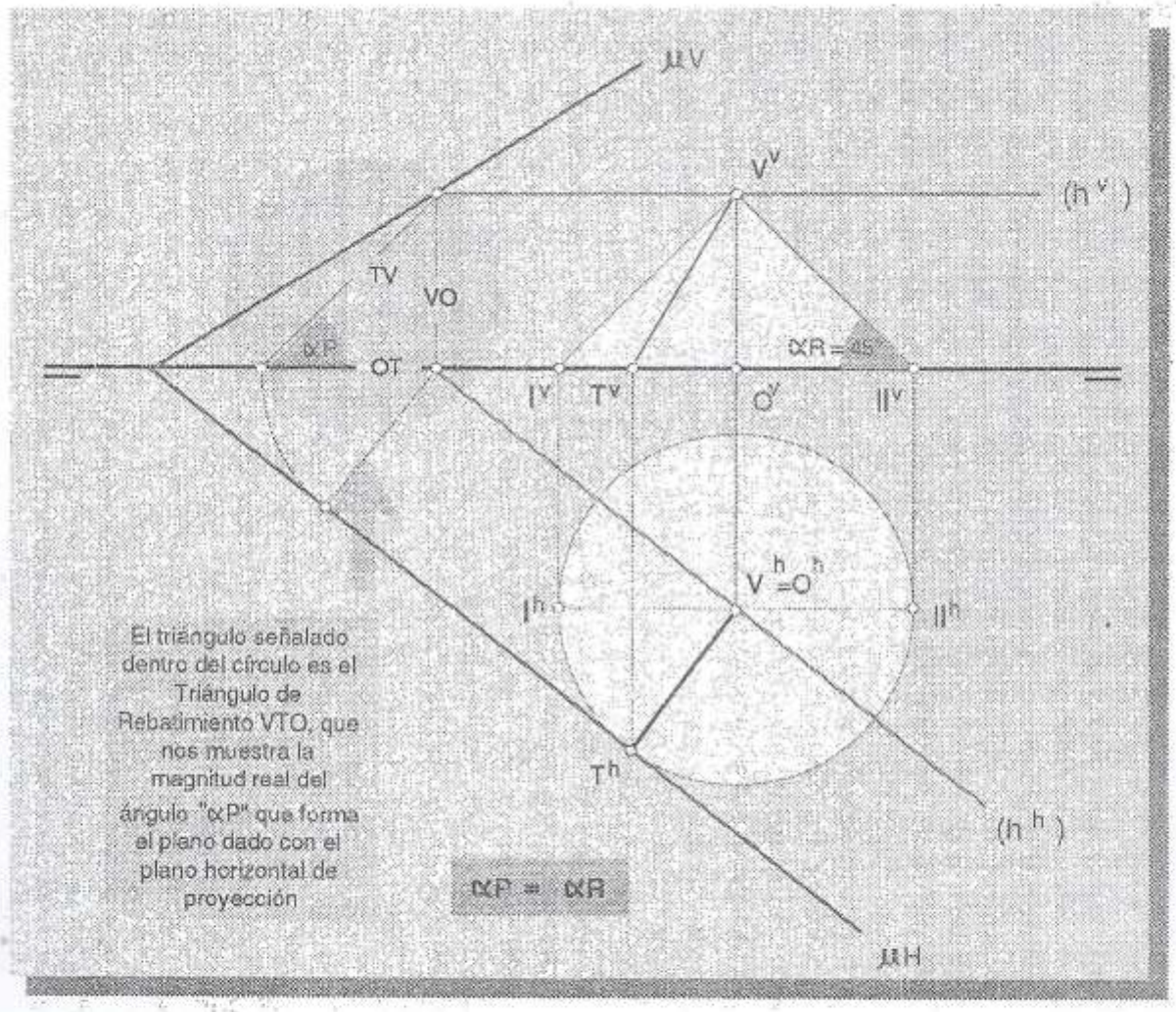


Las ilustraciones correspondientes nos muestran, sin embargo, el resultado de aplicar el mismo procedimiento usado en el caso anterior. Aquí vemos que el

contacto entre la base del cono y la traza horizontal (μH) del plano, se establece apenas mediante un punto " T " de tangencia entre ambos elementos.

El segmento " VT ", reproduce entonces la frontera entre el plano y el cono, y representa la generatriz a traves de la cual ambos elementos hacen contacto, es decir, son tangentes. Ese segmento ocupa el mismo lugar de la recta de Máxima Pendiente que pasando por "V" mide el ángulo (α_P) del plano plano {μ} con {PH}, y ofrece la única solución a este problema que se presenta siempre que $\alpha_P = \alpha_R$.

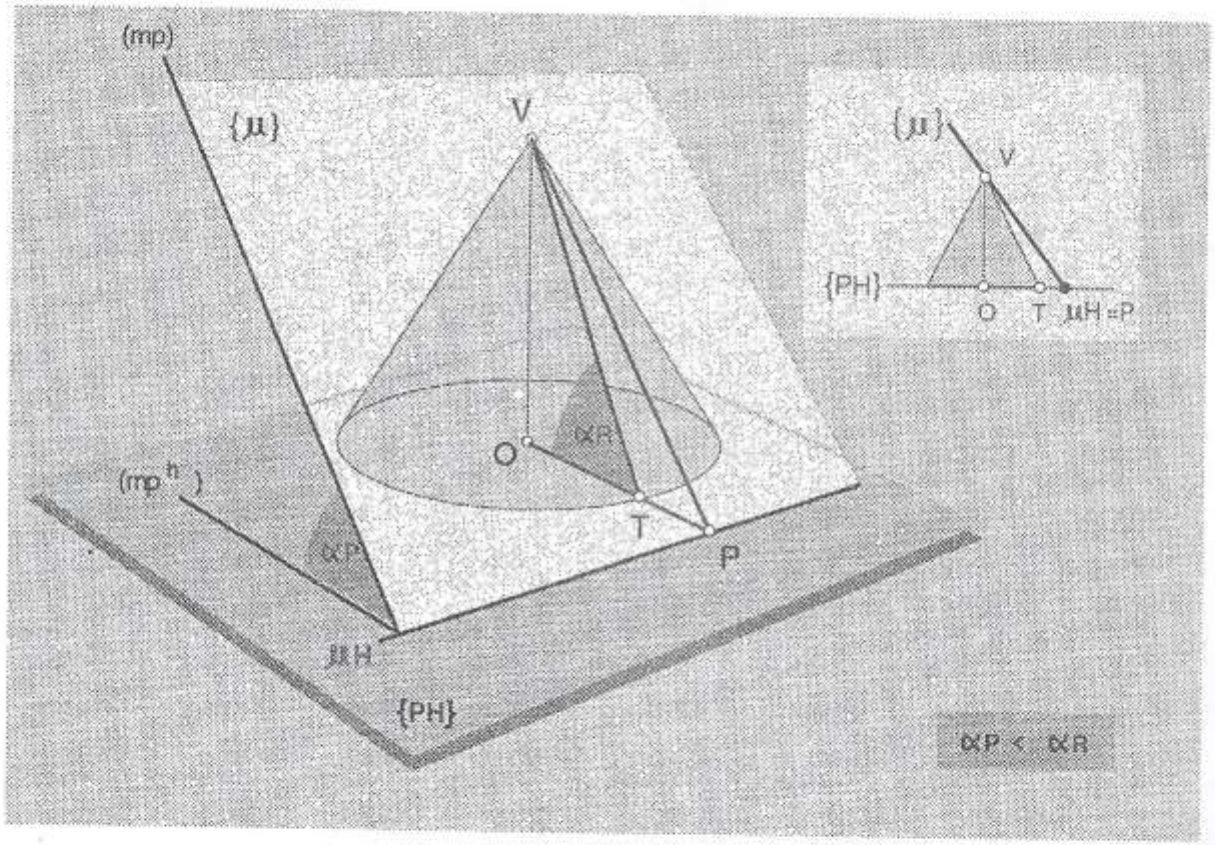
La figura siguiente nos ofrece la representación diédrica que corresponde a este caso, en la cual podemos verificar las relaciones descritas.



CUANDO $\alpha_P < \alpha_R$.

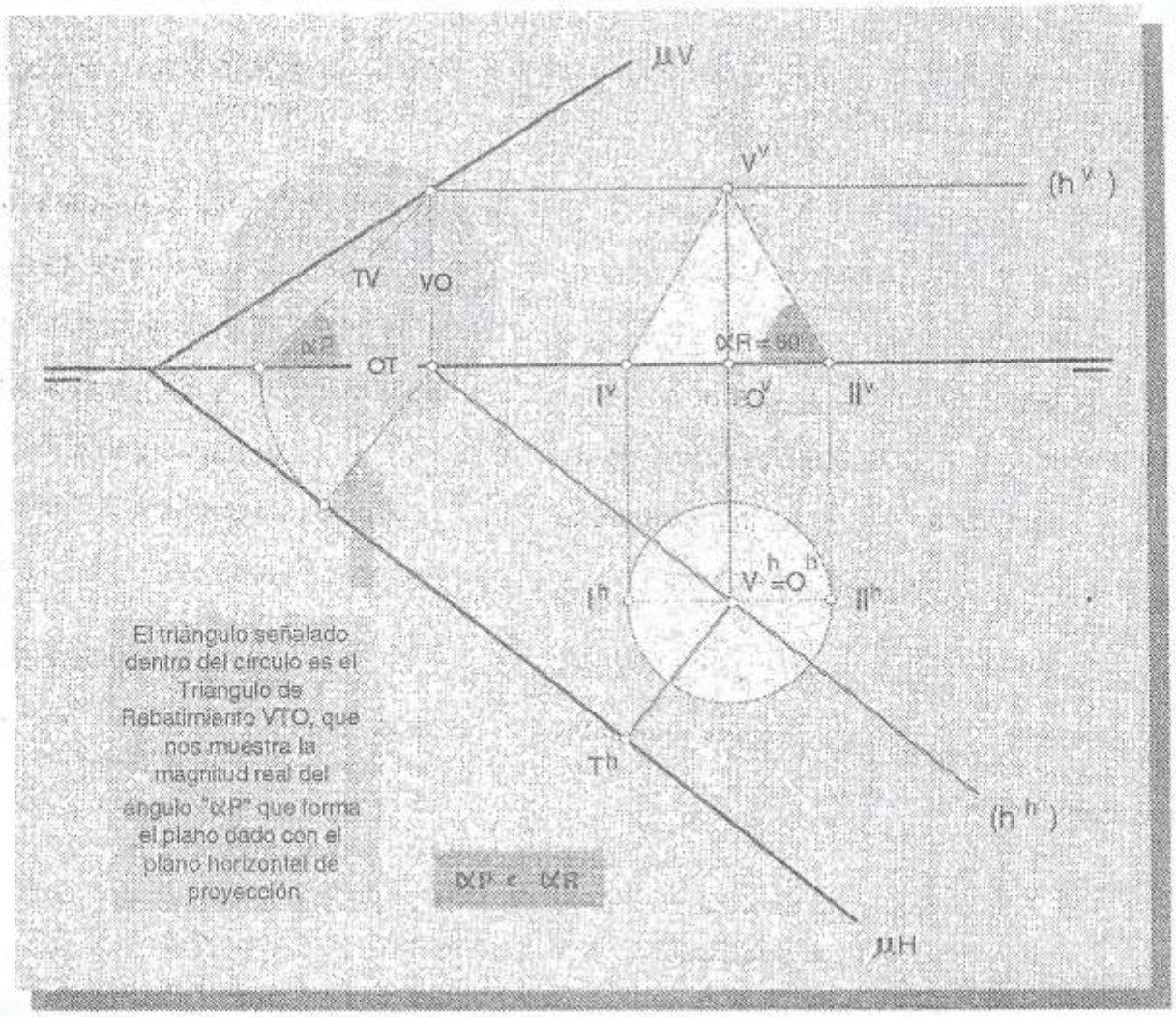
Cuando el ángulo "α_P" que forma el plano considerado {α} con el plano de proyección, que para nuestro ejemplo seguirá siendo el Horizontal {PH}, es menor que el ángulo "α_R" que forma la recta buscada , es decir, cuando se satisface la relación "$\alpha_P < \alpha_R$", el problema no puede ofrecer solución alguna, puesto que es imposible que un plano con una determinada pendiente contenga ninguna recta que forme con {PH} un ángulo mayor.

En este caso, hecha la verificación correspondiente de la relación entre los respectivos ángulos, encontraremos que efectivamente "α_P" < "α_R" y demostraremos la inexistencia de solución al problema, a través de gráficos semejantes a los siguientes.



Observe cuidadosamente que el cono de revolución cuyo vértice se encuentra en el

punto "V" no es tangente al plano {μ}, como podemos verificarlo claramente al observar las rectas "VT" y "VP", las cuales pertenecen respectivamente a ambos elementos y se hallan separados entre sí. Es obvio pues, que las generatrices del cono forman un ángulo mayor con el plano horizontal, que el formado por el plano {μ}.



La representación diédrica de la misma situación, nos muestra de otra manera la situación descrita. El ángulo "α_R" de las generatrices del cono es apreciado directamente en su proyección vertical, la cual nos muestra en el segmento "I^v - II^v", el diámetro de la circunferencia de su base, reproducida en proyección horizontal.

Esta base apoyada en el plano horizontal de proyeccón, no llega a alcanzar siquiera el tamaño necesario para hacer contacto con la traza "μH", lo cual demuestra que las generatrices del cono de revolución tienen una pendiente mayor que la del plano, y por ello es imposible que ninguna de ellas le pertenezca.

DETERMINACION DE LAS PROYECCIONES DE PLANOS QUE PASANDO POR UNA RECTA DADA, FORMAN ANGULOS CONOCIDOS CON UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION.

Los casos que veremos a continuación consisten en establecer las soluciones al problema de determinar las trazas de un plano que pasando por una recta dada, forma un ángulo conocido con uno cualquiera de los planos de proyección. La conveniencia de poder comparar estos distintos casos entre sí, y de apreciarlos dentro del contexto de los que hemos explicado con anterioridad, nos sugieren que puede ser provechoso seguir utilizando el plano horizontal de proyección como superficie de apoyo para los elementos que forman parte de nuestra descripción.

Imaginemos entonces, que conocemos una recta como "r", y deseamos determinar las trazas de aquellos planos que forman ángulos conocidos con el plano horizontal de proyección.

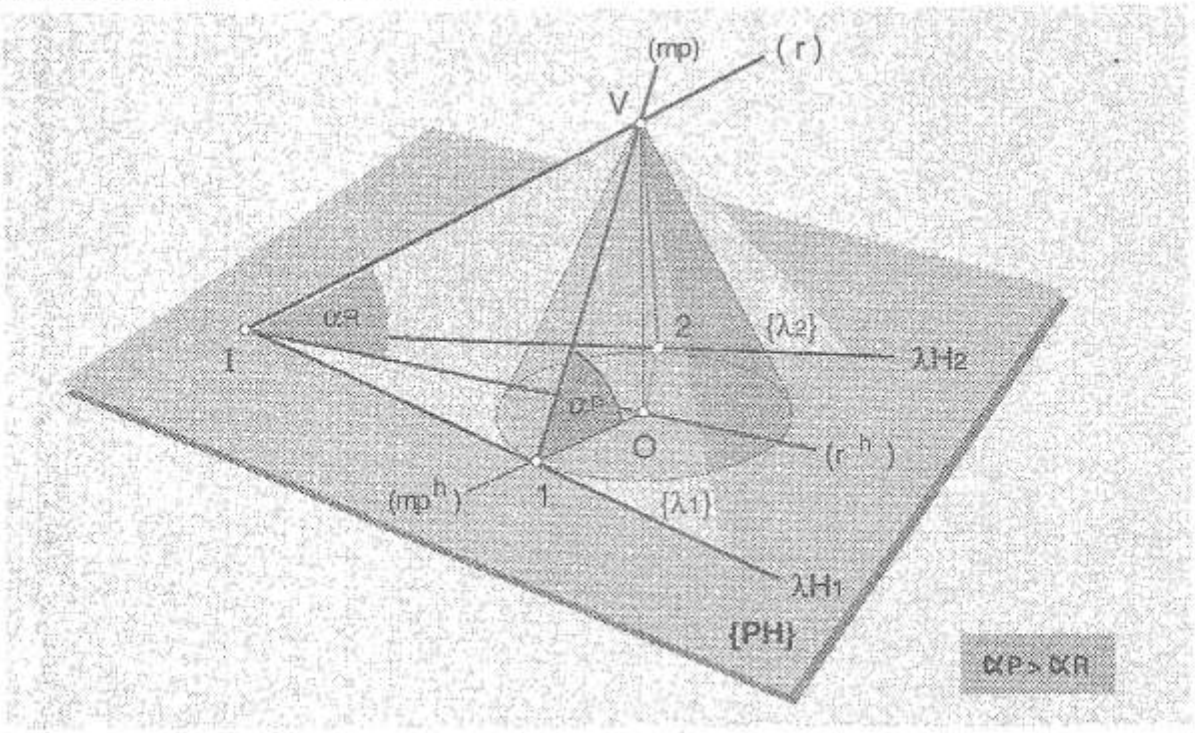
CUANDO $\alpha_P > \alpha_R$.

La primera situación que encontramos nos la ilustra la figura siguiente en el espacio. Recordemos que a semejanza de los casos anteriores, ocurren tres situaciones distintas, diferenciadas por las relaciones que pueden compartir los ángulos que ambos elementos geométricos forman con el plano horizontal. Procederemos a encontrar la solución al problema cuando se cumple que ($\alpha_P > \alpha_R$). Digamos que en este caso se cumple que "α_P" es igual a 60°.

Cuando observamos el ángulo "α_R" que forma la recta "r" con el plano horizontal

verificamos que efectivamente es menor que el ángulo "α_P" que forma el plano {λ} con aquel plano de proyección.

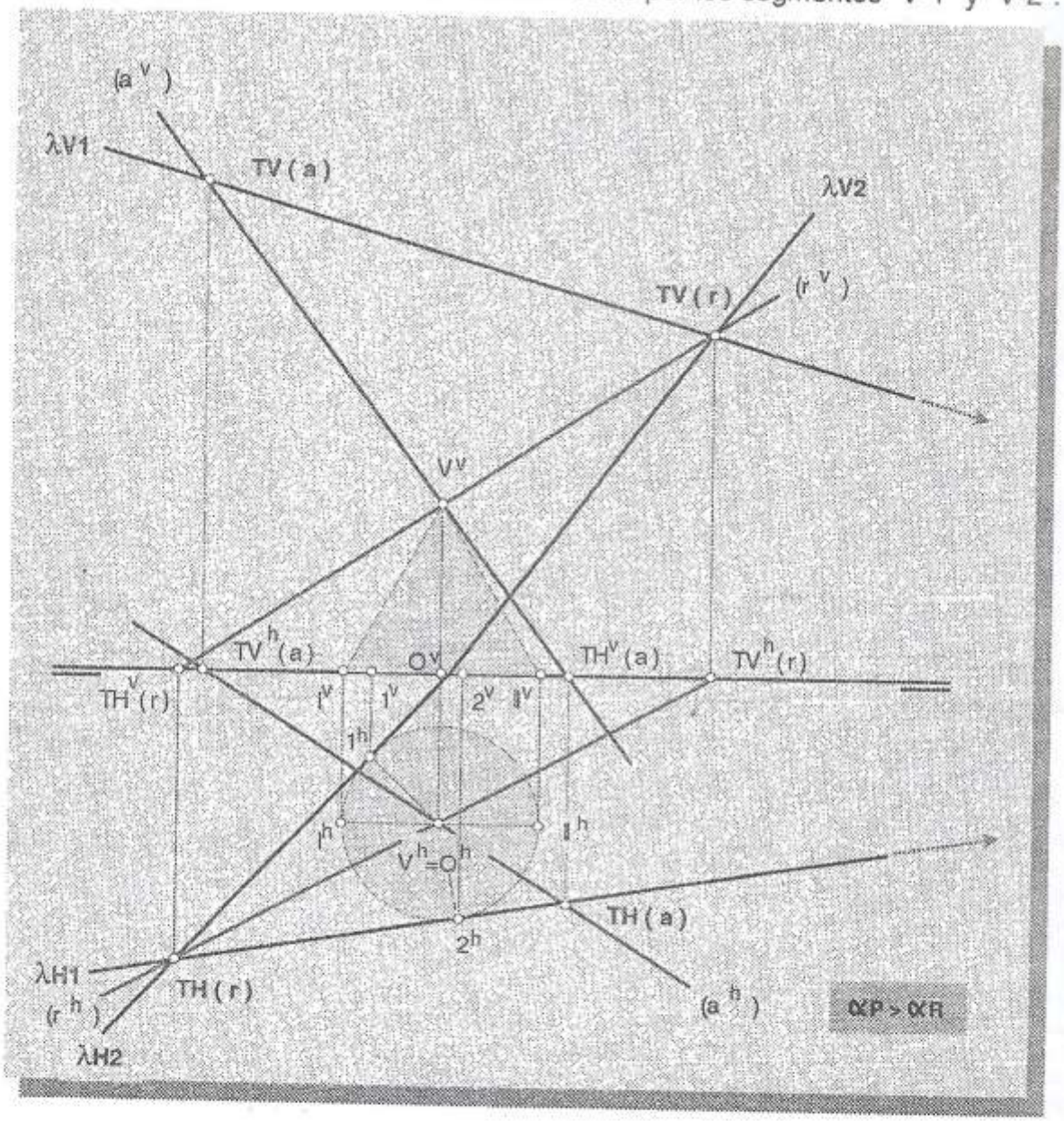
Ahora bien, nosotros sabemos que el ángulo que un plano forma con {PH} está expresado por su recta de Máxima Pendiente, de modo que si determinamos el lugar geométrico de todas aquellas rectas que pasando por el punto "V", forman 60° con {PH}, vamos a describir un cono de revolución cuyas generatrices representan el lugar geométrico de dichas rectas.



En este caso lo que hacemos entonces, es escoger previamente sobre la recta " r " un punto al azar como "V" y, literalmente, "guindar " de ese punto el cono por su vértice. Ese cono, cuyas generatices forman el ángulo indicado con {PH} tiene, además, su base descansando sobre dicho plano de proyección, como lo muestran las figuras anteriores, donde el evento aparece representado en el espacio, y en lforma diédrica. En ellas observamos el cono en proyección vertical bajo la forma de un triángulo equilátero " A-I-II " cuya base se apoya en la Línea de Tierra, y cuya proyección horizontal se ofrece como una circunferencia de diámetro igual a " I - II "

con centro en un punto que recoge sobre sí mismo las proyecciones horizontales de "V" y de "O".

Si, como nos lo asegura la representación espacial, es posible trazar dos planos como "λ_1" y "λ_2" que son tangentes al cono, las respectivas trazas de dichos planos (λH_1 y λH_2), al ser tangentes a la base de dicho cono, nos darán una indicación de aquella tangencia entre los planos "λ_1" y "λ_2" y el cono, la cual se verifica a lo largo de las dos rectas determinadas por los segmentos "V-1" y "V-2".



Esta relación es justamente la que nos aporta la clave para determinar la naturaleza de la solución al problema en Doble Proyección Ortogonal puesto que si, en proyección horizontal, desde la traza correspondiente "TH (r)" de la recta, trazamos dos tangentes a la base del cono, estaremos expresando en ellas mismas las trazas de los dos planos que constituyen la solución al problema.

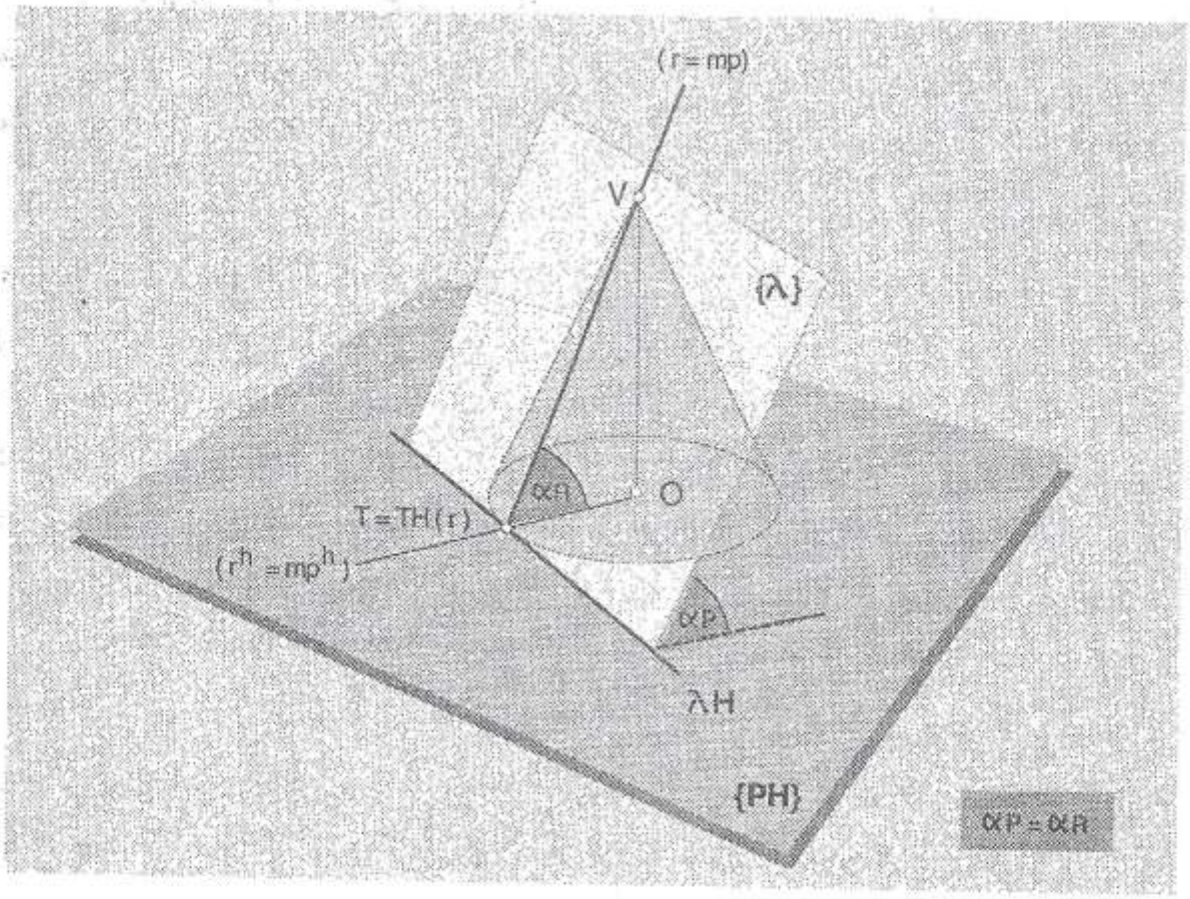
En este caso particular, la determinación de la traza vertical " λV_2" no ofrece dificultad alguna, puesto que ella se determina directamente al trazarla por los puntos determinados por el corte de la Línea de Tierra con "λH_2" y la traza vertical "TV (r) " de la recta " r ". Sin embargo, la traza vertical "λV_1" no se ofrece de manera tan simple, puesto que "λH_1" no se corta con la Línea de Tierra dentro de los límites del dibujo.

Para establecer la posición de "λV_1", nos valemos entonces de una recta auxiliar "a", la cual hacemos pertenecer al plano "λ_1", haciéndola pasar por el punto "V" y por la traza horizontal "λH_1" de dicho plano, donde ella encuentra su propia traza horizontal "TH(a)". La proyección vertical "a^v " de dicha recta se establece al apoyarla en los puntos " V^v " y "$TH^v(a)$" - quien se encuentra sobre LT . Es obvio que la traza vertical " λV_1" habrá de pasar por las respectivas trazas verticales "TV (a)" y "TV (r)" de las rectas "a" y "r", tal como la figura diédrica lo aclara.

CUANDO "α_P" = "α_R"

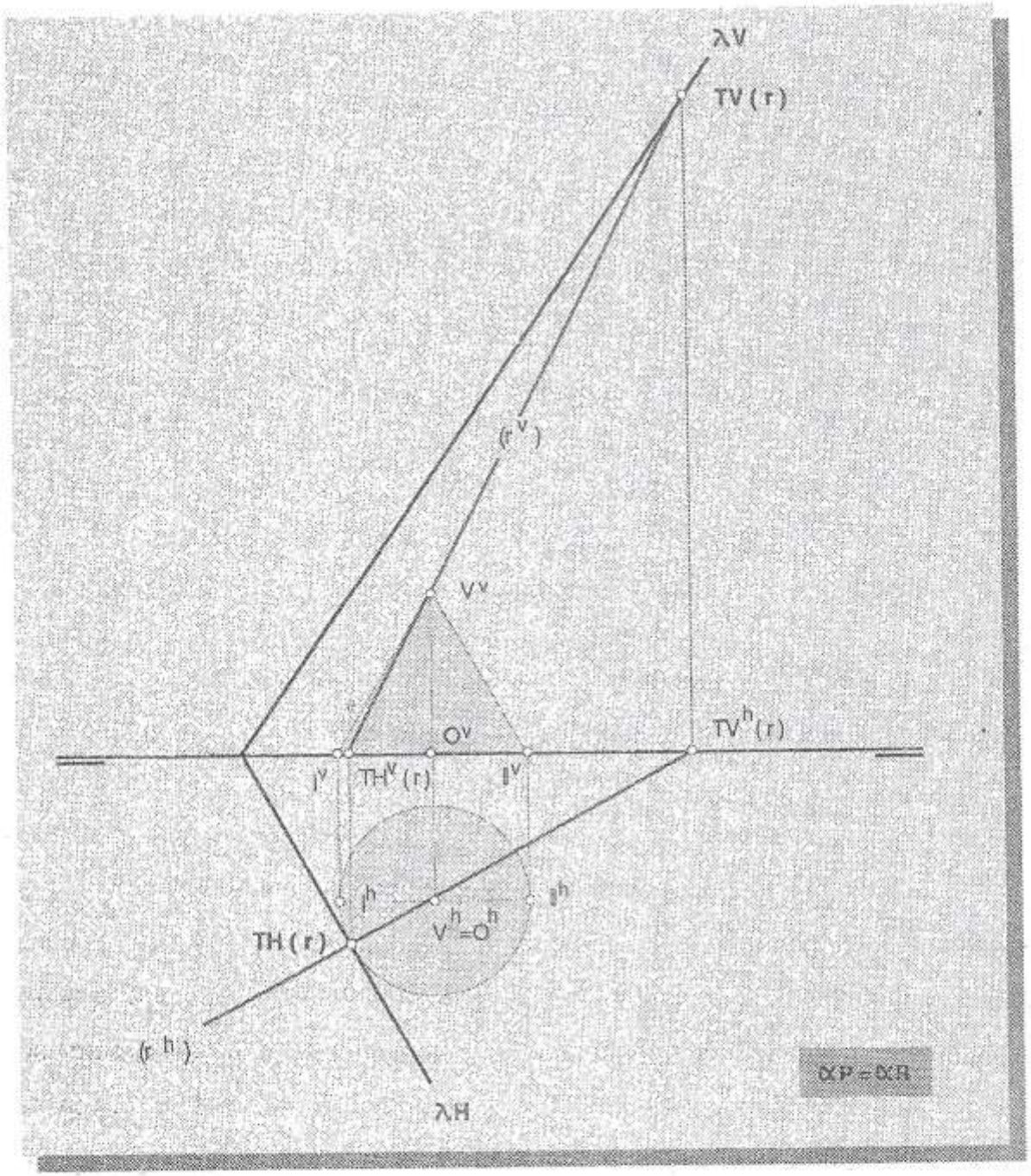
Una situación distinta ocurre cuando los ángulos formados por ambos elementos geométricos son iguales, es decir, cuando se cumple que "$\alpha_P=\alpha_R$", como lo expresa en el espacio la figura de la página siguiente. En este caso, el problema nos arroja una sola solución, evidente si pensamos que aquellas rectas de un plano que forman con {PH} el mismo ángulo que el plano que las contiene, constituyen sus rectas de Máxima Pendiente, y en este caso particular, la recta "r" ocupa la posición de una de ellas, la cual pasa por el punto "V".

Nuevamente, el proceso de resolución de este problema en Doble Proyección Ortogonal, no demanda mas que determinar las trazas de un plano dado por su recta de Máxima Pendiente —expresada por "r"— sin necesidad de construir el lugar geométrico representado por el cono, como lo hicimos en el caso anterior. No obstante, en nuestra ilustración, recurrimos a él, para hacer evidente las relaciones existentes entre la recta "r" y el plano que se genera como única solución del problema.



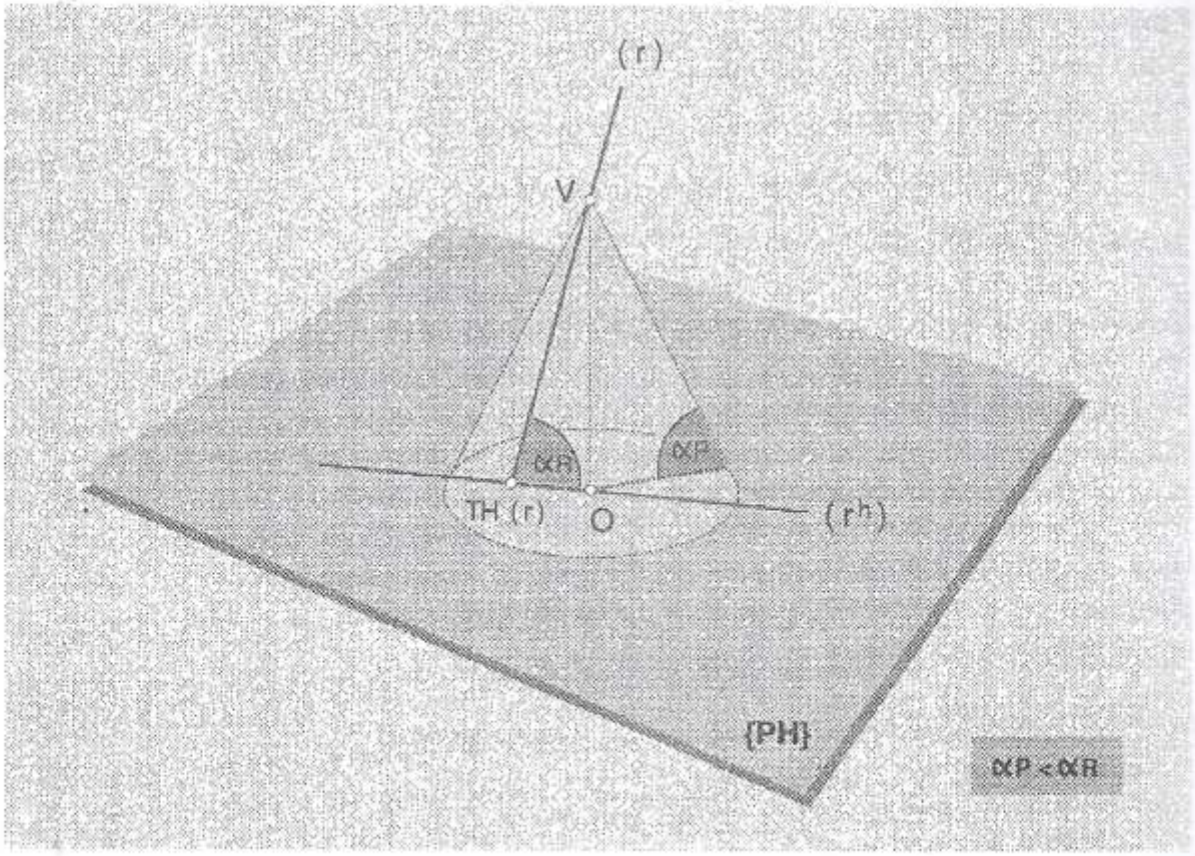
En la representación diédrica observamos que al ubicar la proyección vertical del cono, lugar geométrico de todas las rectas de Máxima pendiente de los planos que pasando por "V" forman 60° con el plano horizontal, su proyección horizontal —representada por la circunferencia de diámetro "I^h-II^h"— contiene la traza

horizontal "TH (r)" de la recta "r", indicación inequívoca, no solo de su condición de recta de Máxima Pendiente del plano {λ}, sino de su papel como recta de tangencia entre dicho plano y el cono.



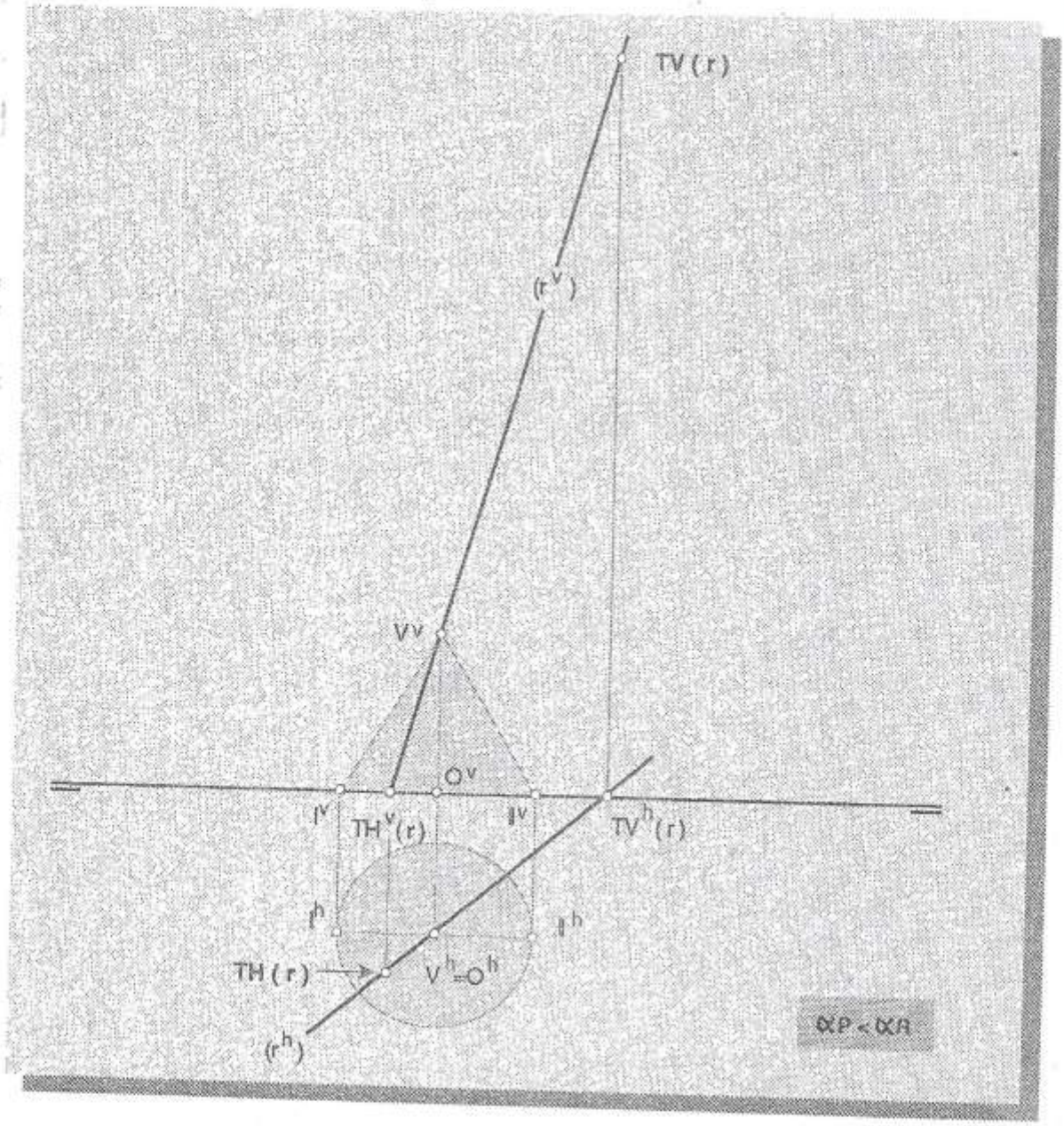
CUANDO "α_P" < "α_R"

La última de las situaciones que se nos puede presentar dentro de estos casos nos la ilustran las figuras siguientes, donde se verifica la relación "$\alpha_P < \alpha_R$", en la cual es imposible que el problema tenga solución alguna, puesto que una recta no



puede pertenecer a un plano cuando su ángulo "α_R" con el plano horizontal excede al ángulo "α_P" de la recta de Máxima Pendiente del plano. Así, la base del cono que representa el lugar geométrico de todas las rectas de Máxima pendiente de los planos que pasando por "V", forman 60° con {PH} es tan grande, que la traza horizontal " TH (r) " de la recta " r " queda dentro del área determinada por su perímetro y no sobre éste o fuera de él, lo cual imposibilita de manera radical la existencia de ningun plano que conteniendo a "r", tambien contenga alguna generatriz del cono.

La representación diédrica, la cual es consecuente con la situación descrita, aparece ilustrada en la figura siguiente y nos amplía aún mas la descripción gráfica del evento que acabamos de explicar.



El conocimiento que abarca toda la información que hemos venido manejando a lo largo de este estudio y el cual cierra este capítulo, constituye la base fundamental para ingresar al estudio de la construcción de Poliedros, tópico que desarrollaremos en los dos capítulos siguientes.

8. RELACIONES GEOMETRICAS

CUESTIONARIO

1. ¿Qué entiende usted por Relaciones Geométricas?
2. ¿ Cuándo dos rectas son secantes?
3. ¿ Cuáles condicines deben cumplir dos rectas para ser secantes?
4. ¿ Cuando dos rectas son Paralelas?
5. ¿ Cuando dos rectas son Ortogonales?
6. ¿ Cuando dos rectas son Perpendiculares ?
7. ¿ Cuál condición debe cumplirse para que una recta y un plano sean paralelos entre sí?
8. ¿ Cuál condición debe cumplirse para que dos planos sean paralelos entre sí?
9. ¿ Cuál condición debe cumplirse para que una recta y un plano sean perpendiculares entre sí?
10. ¿ Cuál condición debe cumplirse para que dos planos sean sean perpendiculares entre sí?
11. ¿Cuántas rectas paralelas a otra pueden pasar por un punto exterior a ella?
12. ¿Cuántas rectas paralelas a un plano pueden pasar por un punto exterior a él?
13. ¿Cuántos planos paralelos a otro pueden pasar por un punto exterior a él?
14. ¿Cuántas rectas perpendiculares a otra pueden pasar por un punto exterior a ella?
15. ¿Cuántas rectas ortogonales a otra pueden pasar por un punto exterior a ella?
16. ¿Cuántas rectas perpendiculares a un plano pueden pasar por un punto exterior a él?
17. ¿Cuántos planos perpendiculares a una recta pueden pasar por un punto exterior a ella?
18. ¿Cuántos planos perpendiculares a otro pueden pasar por un punto exterior a él?
19. ¿En cuál posición se encuentra la recta de intersección entre:
    I. Un plano horizontal y uno cualquiera ?
    II. Un plano frontal y un proyectante horizontal?
    III. Un plano de perfil y un horizontal ?
    IV. Un plano proyectante vertical y uno cualquiera ?
    V. Un plano horizontal y un proyectante vertical ?
    VI. Un plano frontal y un horizontal ?
    VII. Un plano cualquiera y uno de perfil ?
    VIII. Un plano frontal y un proyectante vertical ?
    IX. Un plano de perfil y un proyectante vertical ?
    X. Un plano cualquiera y uno paralelo a L.T. ?
20. ¿En cuál posición particular se encuentra un plano:
    I. Cuyas rectas características son ambas ortogonales a la Linea de Tierra?
    II. Cuya recta horizontal es ortogonal a la Linea de Tierra?

III. Cuya recta frontal es ortogonal a la Linea de Tierra?

IV. Cuya recta de máxima pendiente es paralela al Plano Vertical?

V. Cuya recta de máxima inclinación es paralela al Plano Vertical?

VI. Cuya recta de máxima pendiente es perpendicular al Plano Horizontal?

VII. Cuya recta de máxima inclinación es perpendicular al Plano Vertical?

VIII. Cuyas rectas características se confunden?

IX. Cuyas rectas características forman entre sí un ángulo 90º >d > 0º ?

X. Cuyas rectas de máxima pendiente y máxima inclinación se confunden?

21. Responda cada una de las preguntas siguientes:

I. Cuantos planos que formen 45º con el Plano Horizontal pueden pasar por una recta que forme 30º con dicho plano de proyección?

II. Cuantas rectas que formen 30º con el Plano Vertical pueden pasar por un punto de un plano que forma 60º con dicho plano de proyección?

III. Cuantos planos que formen 30º con el Plano Horizontal pueden pasar por una recta que forme 60º con dicho plano de proyección?

IV. Cuantas rectas que formen 45º con el Plano Vertical pueden pasar por un punto de un plano que forma el mismo ángulo con dicho plano de proyección?

V. Cuantos planos que formen 45º con el Plano Vertical pueden pasar por una recta que forma el mismo ángulo con dicho plano de proyección?

VI. Cuantas rectas que formen 30º con el Plano Horizontal pueden pasar por un punto de un plano que forma 15° con dicho plano de proyección?

LOS POLIEDROS.

Los Poliedros, los cuales forman parte del conjunto de los sólidos geométricos, son aquellas figuras geométricas finitas y tridimensionales, limitados por CARAS planas o polígonos. Las lineas de intersección entre sus caras adyacentes son segmentos de recta que se llaman ARISTAS, y los puntos de interseccion entre estas se llaman VÉRTICES. Los vértices son, a su vez, extremos de las aristas y puntos comunes a las caras concurrentes.

Dentro de los sólidos geométricos, se distinguen categorías diversas, y de un modo muy general que aunque no los incluye a todos, podríamos clasificarlos en: 1. Sólidos Rectos y Oblícuos, 2. Sólidos de Revolución y 3.- Sólidos Regulares.

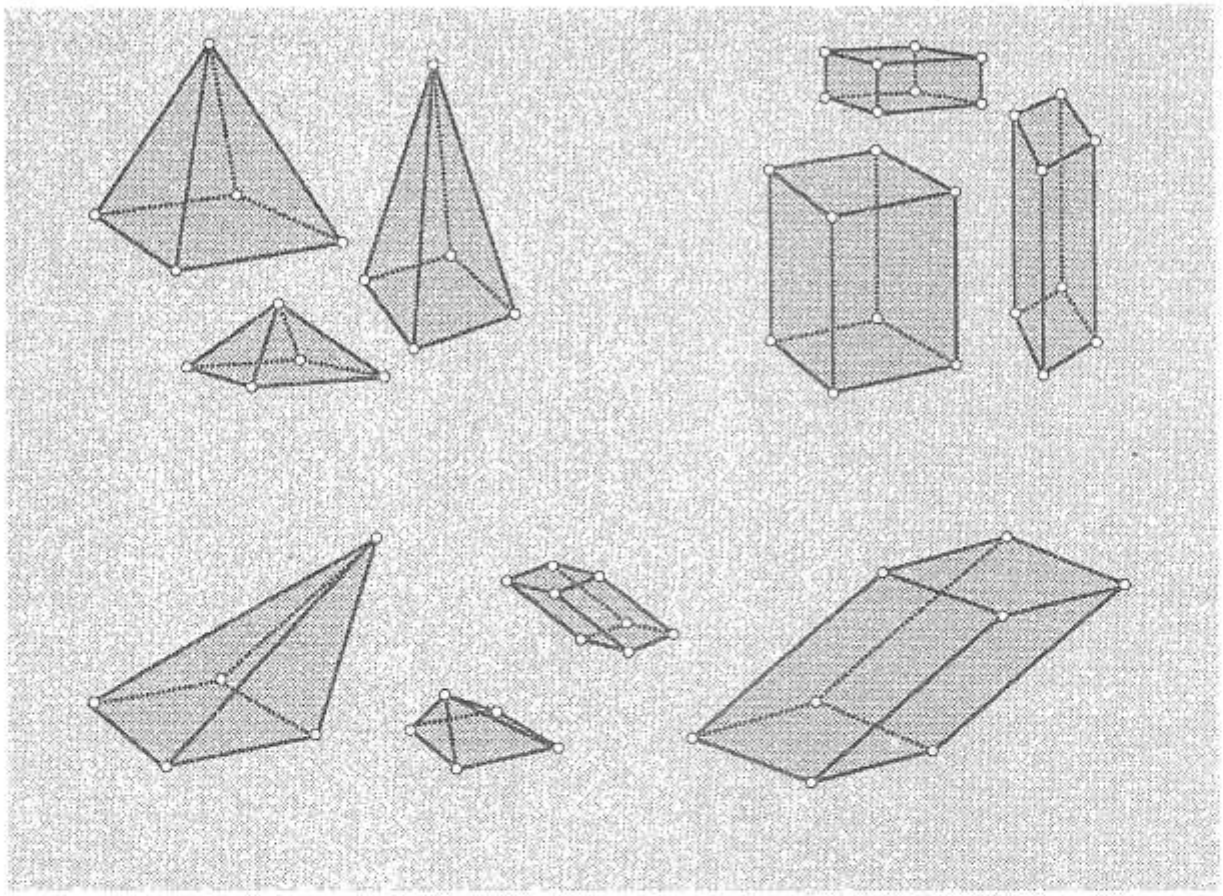
SOLIDOS RECTOS Y OBLICUOS.

Estos sólidos, que comprenden fundamentalmente Prismas y Pirámides, se desarrollan a lo largo de un eje que se intersecta con un plano en el cual se apoyan y que se suele llamar Plano de la Base.

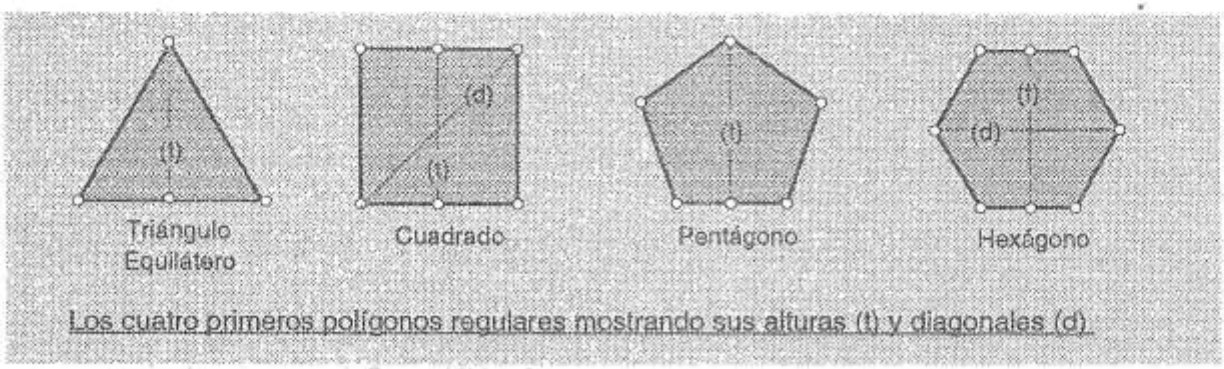
En los sólidos rectos el eje del sólido, el cual contiene la altura del mismo, y el plano de la base son siempre ortogonales, mientras que en los oblícuos el ángulo (α) que dichos elementos forman entre sí puede tener un valor cualquiera siempre que se cumpla que $90º \neq \alpha \neq 0º$.

Por otra parte, en este tipo de sólidos la forma de la base puede ser regular o irregular, cualidad que siempre se expresa en la nomenclatura del poliedro. Así mismo, la dimensión de la base es siempre independiente de la magnitud de la altura, y cada uno de dichos elementos puede tomar valores cualesquiera, lo cual da lugar a que poliedros rectos u oblícuos que tengan el mismo nombre puedan

mostrarse bajo apariencias totalmente distintas, como lo revelan las figuras siguientes.



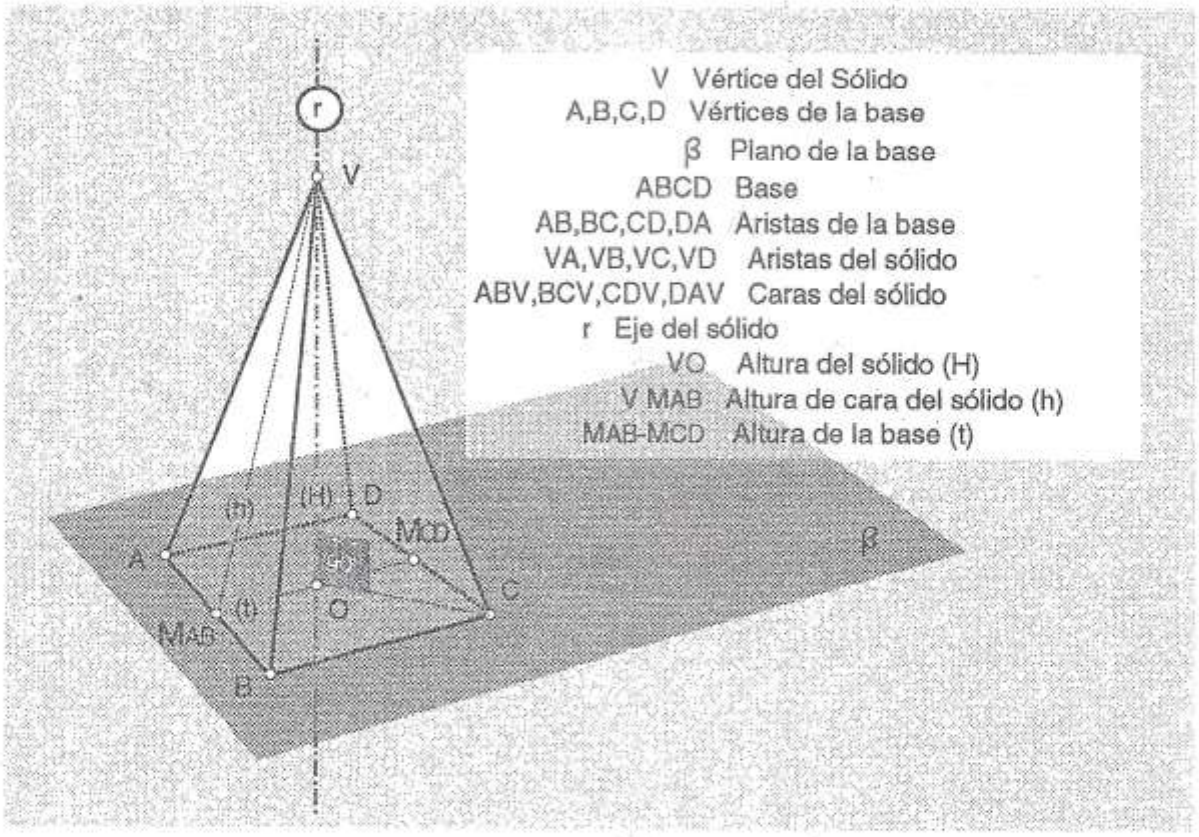
De este grupo de sólidos, en nuestro curso solo nos limitaremos al estudio de la morfología y las proyecciones de las Pirámides y los Prismas Rectos Regulares cuyas bases tienen la forma de los polígonos representados a continuación.



Los cuatro primeros polígonos regulares mostrando sus alturas (t) y diagonales (d)

PIRAMIDES RECTAS REGULARES

Las pirámides rectas regulares son poliedros conformados por un polígono regular llamado BASE y un punto llamado VÉRTICE DEL SÓLIDO (V), que forma junto con el centro (O) del polígono base, un segmento (VO) perpendicular a él, el cual define la altura del poliedro.



La base se encuentra contenida en un plano que, sabemos, se llama PLANO DE LA BASE, mientras que la altura (H) se halla a su vez contenida en una recta que se llama EJE DEL SÓLIDO. La figura ilustra una pirámide recta y sus elementos constituyentes.

Note que el vértice (V) del poliedro es el punto de concurrencia de las aristas del sólido, las cuales son siempre de tamaño semejante y forman el mismo ángulo con el plano de la base. Las caras del sólido, por su parte, son triángulos isósceles de

igual superficie que comparten entre sí las aristas del sólido, mientras se relacionan con el polígono de apoyo a través de las aristas de la base. El centro de la base (O) coincide con el punto de intersección entre el eje del poliedro y el plano de la base, elementos que guardan entre sí una relación de ortogonalidad común a todos los sólidos rectos.

SECCIONES TÍPICAS DE LA PIRÁMIDE

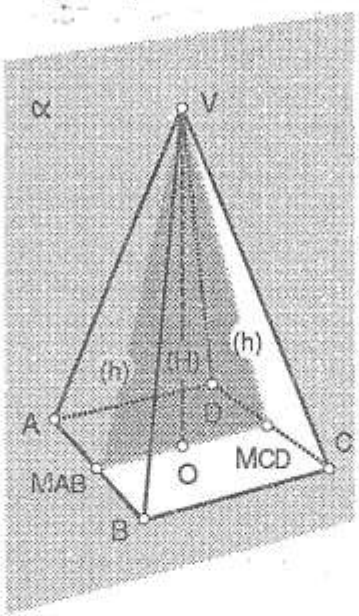
En aquellas pirámides cuyas bases tienen un NÚMERO PAR DE LADOS podemos reconocer DOS SECCIONES TÍPICAS producidas por planos que contienen al eje del sólido, y a las cuales llamaremos SECCIONES PRINCIPAL y DIAGONAL.

La Sección Principal es aquella producida por un plano que pasa por el vértice (V) del poliedro y por los puntos medios de dos aristas opuestas de la base, de tal modo que reproduce un triángulo isósceles cuyos lados iguales son las alturas de cara (h) del sólido mientras el otro es la altura (t) de la base.

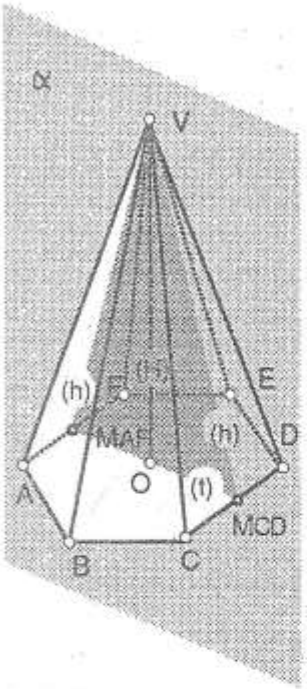
Por su parte, la Sección Diagonal aparece cuando el plano secante, además de pasar por el vértice (V) del poliedro, lo hace tambien por dos vértices opuestos de la base. De este modo la forma de la sección diagonal es tambien la de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son las aristas (a) del sólido, en tanto que el lado restante reproduce la diagonal (d) de la base. Las figuras mostradas a continuación nos ilustran dichas secciones en pirámides cuyas bases cuentan con un número par de lados.

Invariablemente, las Secciones Principales de las pirámides rectas de base par son triángulos isósceles de altura igual a la del poliedro, y cuyos lados iguales corresponden a las alturas de las caras del mismo, mientras que el lado desigual representa la altura de la base, que es justamente la distancia entre dos de sus aristas opuestas. Las Secciones Diagonales son tambien triángulos isósceles de

La Sección Principal "V MAB MCD" es el resultado de la intersección entre el plano "α" (el cual contiene a la altura "H=VO" del sólido y a los puntos medios "MAB" y "MCD" de dos aristas opuestas de la base) y la Pirámide. Dicha sección es un triángulo isósceles formado por las dos alturas (h) de cara "V MAB" y "V MCD", y el segmento "MAB" MCD", el cual es la altura del cuadrado de la base y cuya magnitud es la de una arista de la misma.

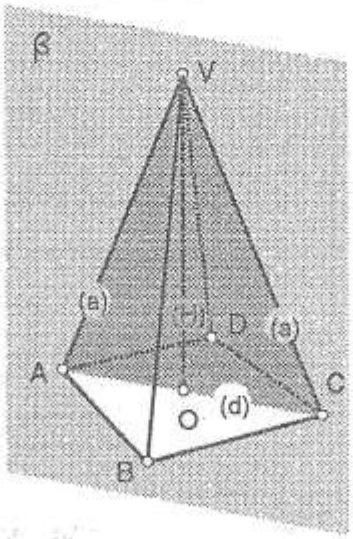


SECCION PRINCIPAL EN PIRAMIDE RECTA REGULAR DE BASE CUADRADA



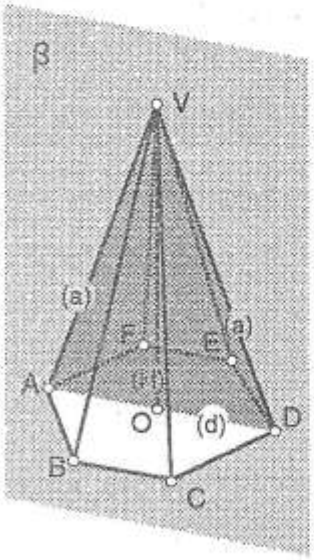
La Sección Principal "V MAF MCD" es el resultado de la intersección entre el plano "α" (que contiene a la altura "H=VO" y a los puntos medios MAF y MCD de dos aristas opuestas de la base) y la Pirámide. Dicha sección es un triángulo isósceles formado por las dos alturas de cara "V MAF" y "V MCD", y el segmento "MAF" MCD", el cual es la altura (t) del cuadrado de la base y cuya magnitud es la de una arista de la misma.

SECCION PRINCIPAL EN PIRAMIDE RECTA REGULAR DE BASE HEXAGONAL



La Sección Diagonal aparece cuando el plano "β" (que contiene a la altura "H=VO" y los vértices opuestos "A" y "C") secciona al poliedro según el triángulo isósceles "VAC", el cual está formado por dos aristas (a) del sólido "VA" y"VC" y una diagonal (d=AC) de la base.

SECCION DIAGONAL EN PIRAMIDE RECTA REGULAR DE BASE CUADRADA

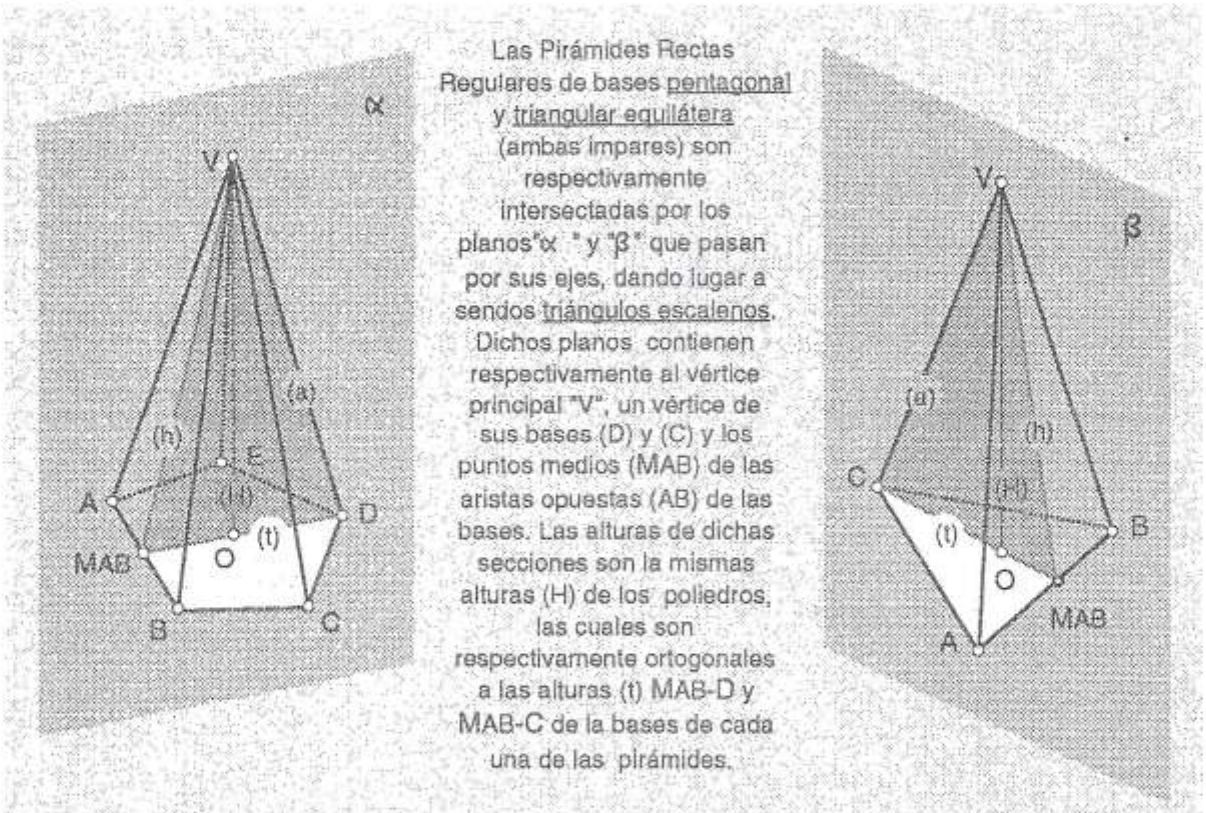


La Sección Diagonal VAD aparece cuando el plano "β" (que contiene a la altura H=VO los vértices opuestos "A" y "D") secciona al poliedro según el triángulo isósceles "VAD", el cual está formado por dos aristas (a) del sólido "VA" y "VD" y una diagonal (d=AD) de la base.

SECCION DIAGONAL EN PIRAMIDE RECTA REGULAR DE BASE HEXAGONAL

altura igual a la del poliedro, mas sus lados iguales representan a dos aristas opuestas del sólido, mientras el lado desigual equivale a una diagonal de la base, como lo demuestran las cuatro ilustraciones representadas en la página anterior.

Aquellas pirámides cuyo número de aristas de la base es IMPAR solo muestran una sección típica, la SECCIÓN PRINCIPAL cuyos lados corresponden a una arista (a) del sólido, una altura (h) de cara y una altura de la base (distancia entre un vértice y el punto medio de la arista opuesta de la base), elementos que son descritos en las dos figuras siguientes.



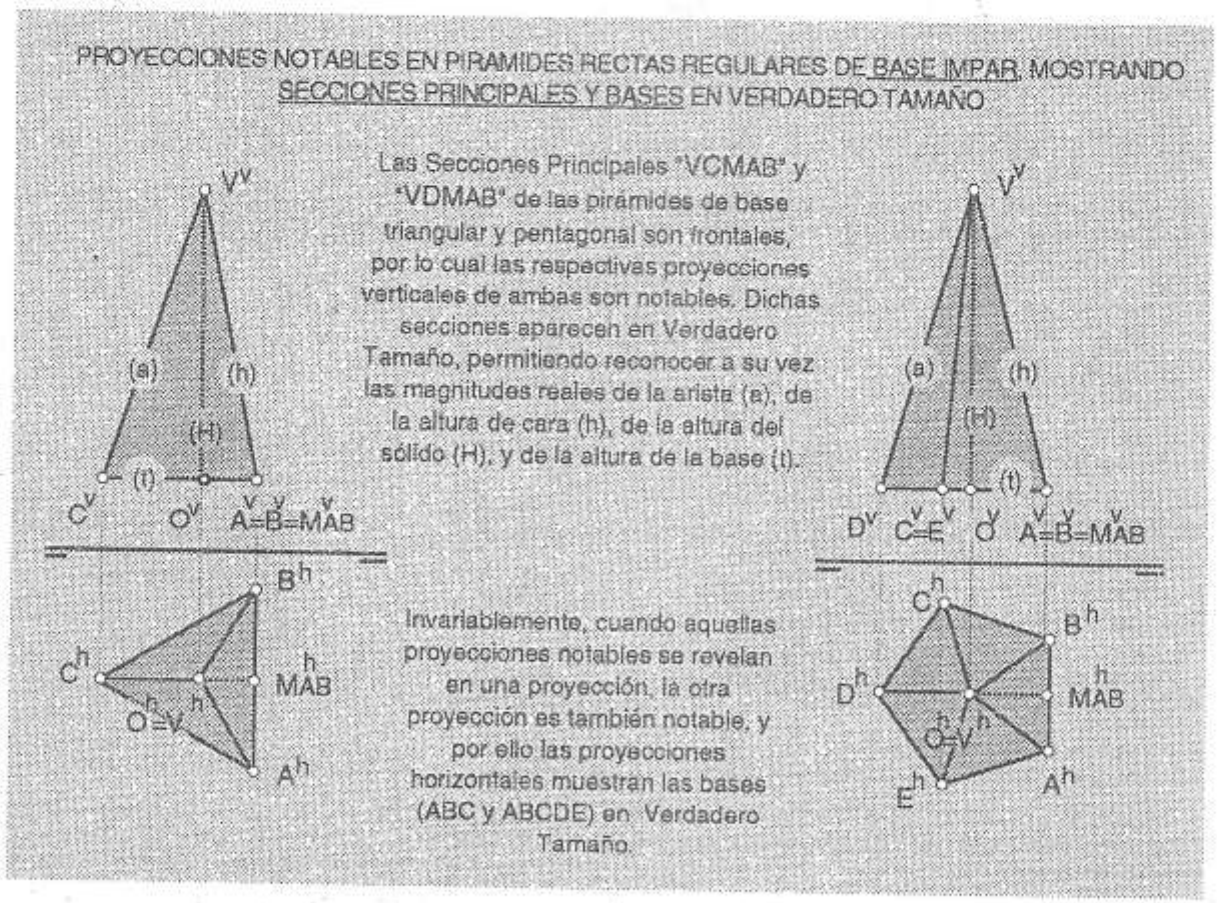
SECCIONES PRINCIPALES EN PIRAMIDES RECTAS REGULARES DE BASE IMPAR

PROYECCIONES NOTABLES DE LAS PIRAMIDES RECTAS.

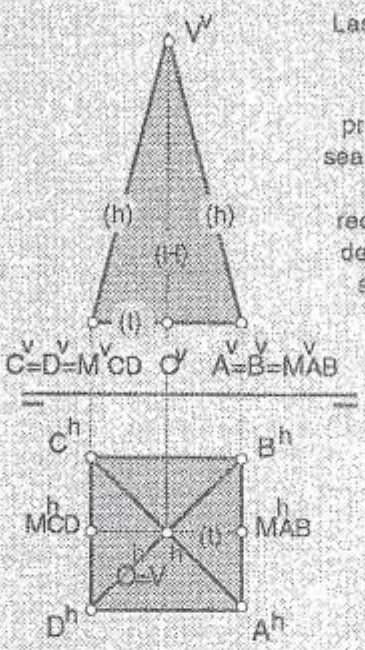
Siempre que una pirámide recta se ubique frente a un plano de proyección de forma tal que su base o alguna de sus secciones típicas sean respectivamente

paralelas a dicho plano de proyección, diremos que la imagen de la pirámide sobre esa superficie es una proyección notable. Toda vez que las imágenes mostradas por las diversas proyecciones notables son distintas entre sí, atenderemos fundamentalmente al hecho de que en dichas proyecciones, las pirámides siempre nos revelan la magnitud real de sus bases o de alguna de sus dos secciones típicas. Podemos pues afirmar que, en general, las pirámides tienen tres proyecciones notables.

Los distintos casos de proyecciones notables de las pirámides que trataremos en este curso están ilustradas en las seis figuras mostradas a continuación.

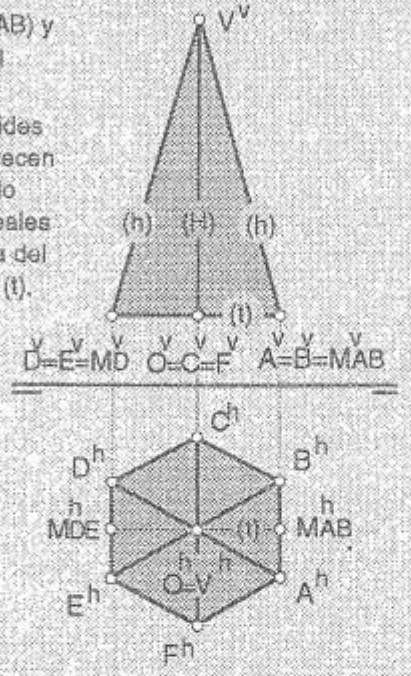


PROYECCIONES NOTABLES EN PIRAMIDES RECTAS REGULARES DE BASE PAR, MOSTRANDO SECCIONES PRINCIPALES Y BASES EN VERDADERO TAMAÑO

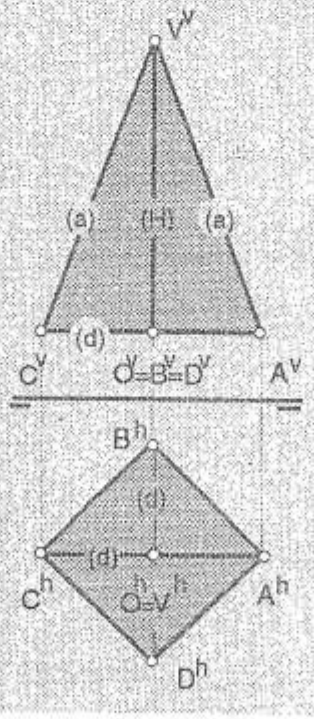


Las Secciones Principales (VMCDMAB) y (VMDEMAB) en posición Frontal determinan que las respectivas proyecciones verticales de las pirámides sean Notables. Dichas secciones aparecen en Verdadero Tamaño, permitiendo reconocer a su vez las magnitudes reales de las alturas de cara (h), de la altura del sólido (H), y de la altura de la base (t).

Las respectivas bases "ABCD" y "ABCDEF" de ambas pirámides están en posición Horizontal, revelandose en proyecciones notables, por lo cual aparecen en Verdadero Tamaño.

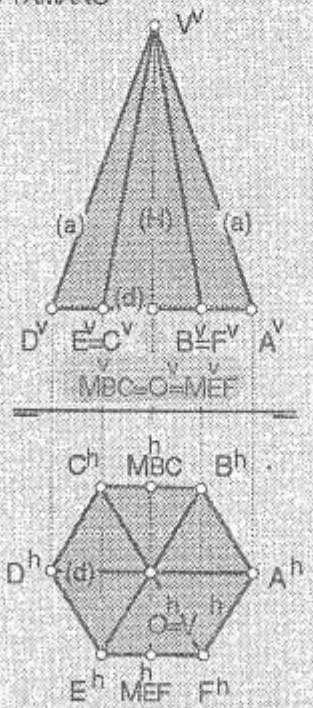


PROYECCIONES NOTABLES EN PIRAMIDES RECTAS REGULARES DE BASE PAR, MOSTRANDO SECCIONES DIAGONALES Y BASES EN VERDADERO TAMAÑO



Las SECCIONES DIAGONALES (VAC) de ambas pirámides están en posición Frontal, lo que determina que sus proyecciones verticales sea notables. Ellas se muestra en verdadero tamaño, permitiendo reconocer a su vez las magnitudes reales de la arista del sólido (a), de la altura del sólido (H), y de la diagonal de la base (d).

Consecuentemente, las bases ABCD y ABCDEF están en posición HORIZONTAL, lo que las convierte en proyecciones notables, mostrándose en Verdadero Tamaño.

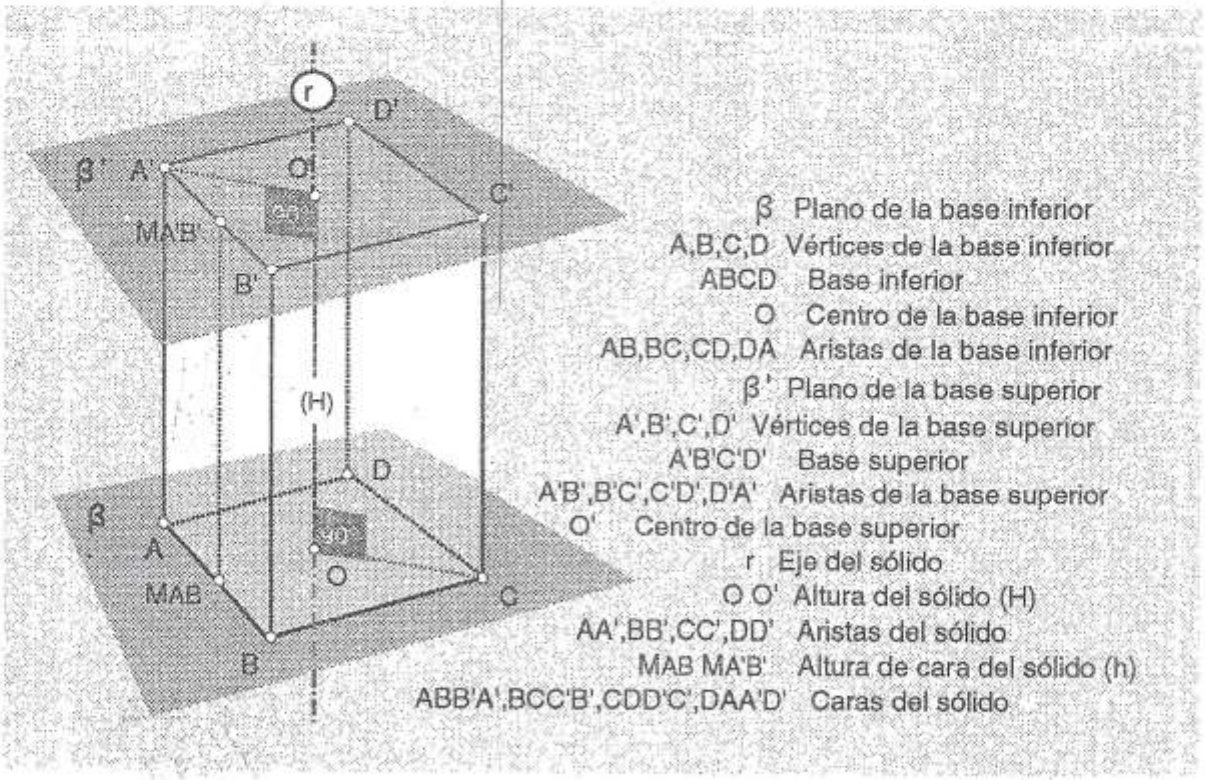


10. POLIEDROS

En general, el uso de las proyecciones notables constituye un recurso imprescindible en el proceso de resolución de problemas de construcción de poliedros en general, mediante la aplicación del cambio de planos, pues permite reducir la última proyección del poliedro en la cadena de imágenes ortogonales a polígonos simples que nos son familiares, cuyas relaciones pueden establecerse dentro del contexto simplificado de la geometría plana, y cuyos procedimientos de construcción hemos aprendido ya con bastante antelación. La aplicación de estos conceptos a la resolución de ejercicios prácticos nos permitirán ahora, comprender la naturaleza de su significado.

PRISMAS RECTOS REGULARES

Los prismas rectos regulares son poliedros conformados por dos polígonos regulares iguales de aristas respectivamente paralelas entre sí, llamados BASES,

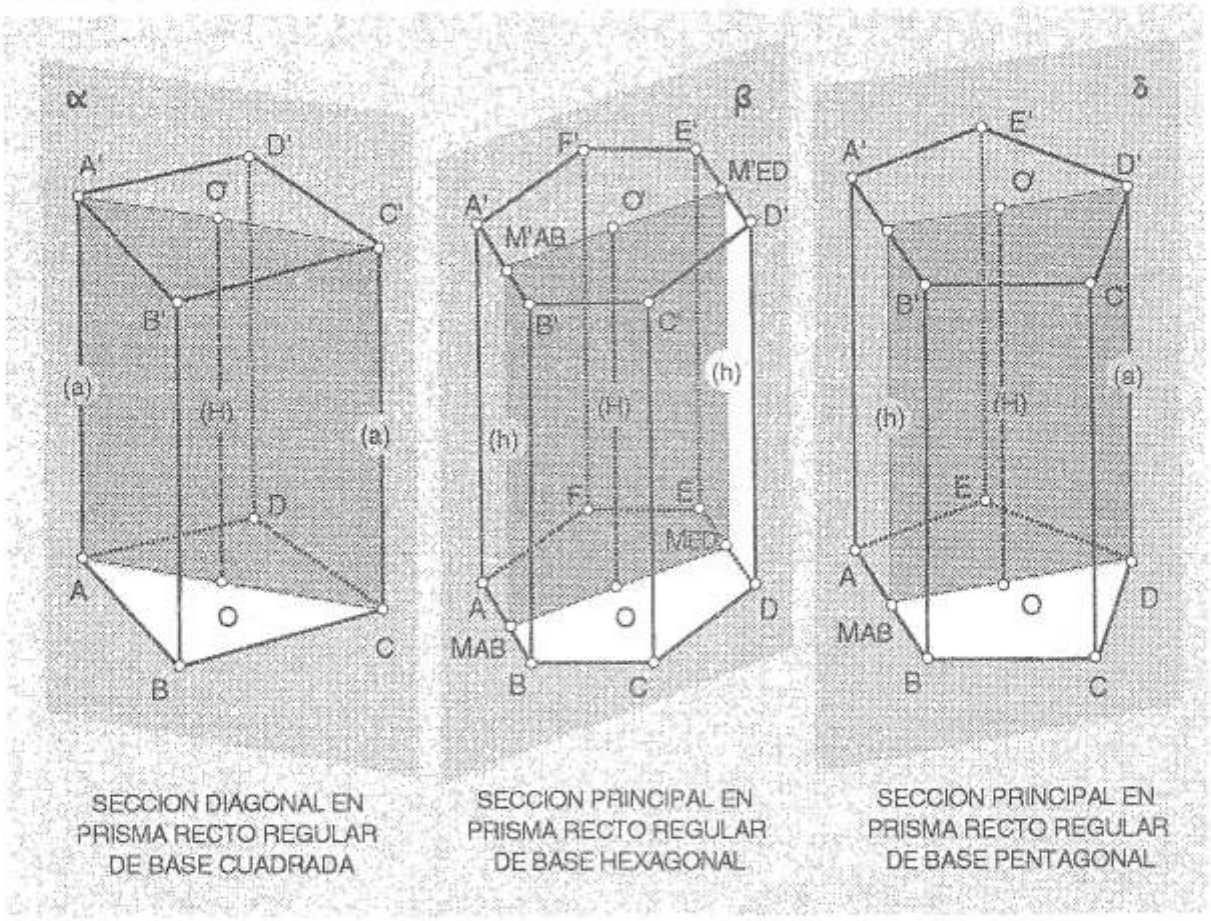


cuyos vértices correspondientes determinan aristas paralelas al eje del poliedro, el cual une los centros de dichas bases. En el prisma mostrado arriba, en la figura,

comprobamos que los cuadrados ABCD y A'B'C'D' que les sirven de bases,,están unidos entre sí por las aristas AA', BB', CC' y DD', las cuales son paralelas al eje del sólido. La misma figura muestra además los componentes básicos de dicho poliedro.

SECCIONES TÍPICAS EN PRISMAS RECTOS REGULARES

De la misma forma que ocurre con las pirámides, las secciones típicas del prisma dependen tambien del número de aristas de sus bases.

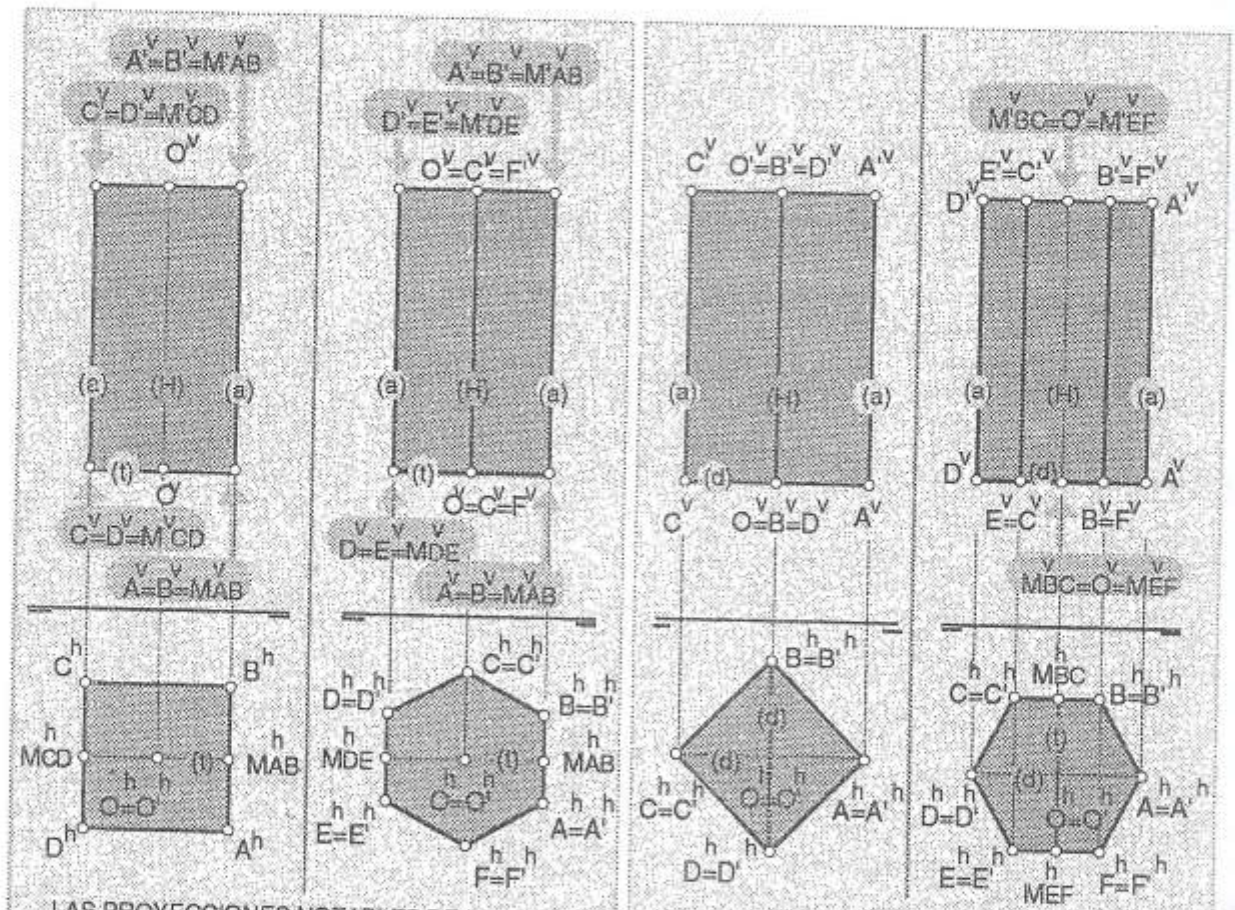


Mientras en todas las pirámides rectas regulares, el perímetro de dichas secciones está constituído solo por tres lados, mostrando —como es natural— polígonos triangulares que pueden ser isósceles [dos aristas principales (a) y una diagonal de base (d) en la sección diagonal, o dos alturas de cara del sólido (h) y una altura de base (t) en la sección principal], o escalenos [una arista (a), una altura de cara

(h) y una altura de base (t) en la sección principal], en los prismas rectos regulares, las secciones típicas, se presentan siempre bajo la forma un rectángulo, constituído bien por dos segmentos representativos de las aristas del sólido (a) y dos alturas de base (t) en las secciones principales, o por las dos primeras y dos diagonales de base (d) en las secciones diagonales, como lo revelan las figuras mostradas en la página anterior.

PROYECCIONES NOTABLES DE LOS PRISMAS RECTOS REGULARES.

El comportamiento de los prismas rectos regulares frente a los planos de proyección, se rige por premisas semejantes a las que caracterizan la conducta de

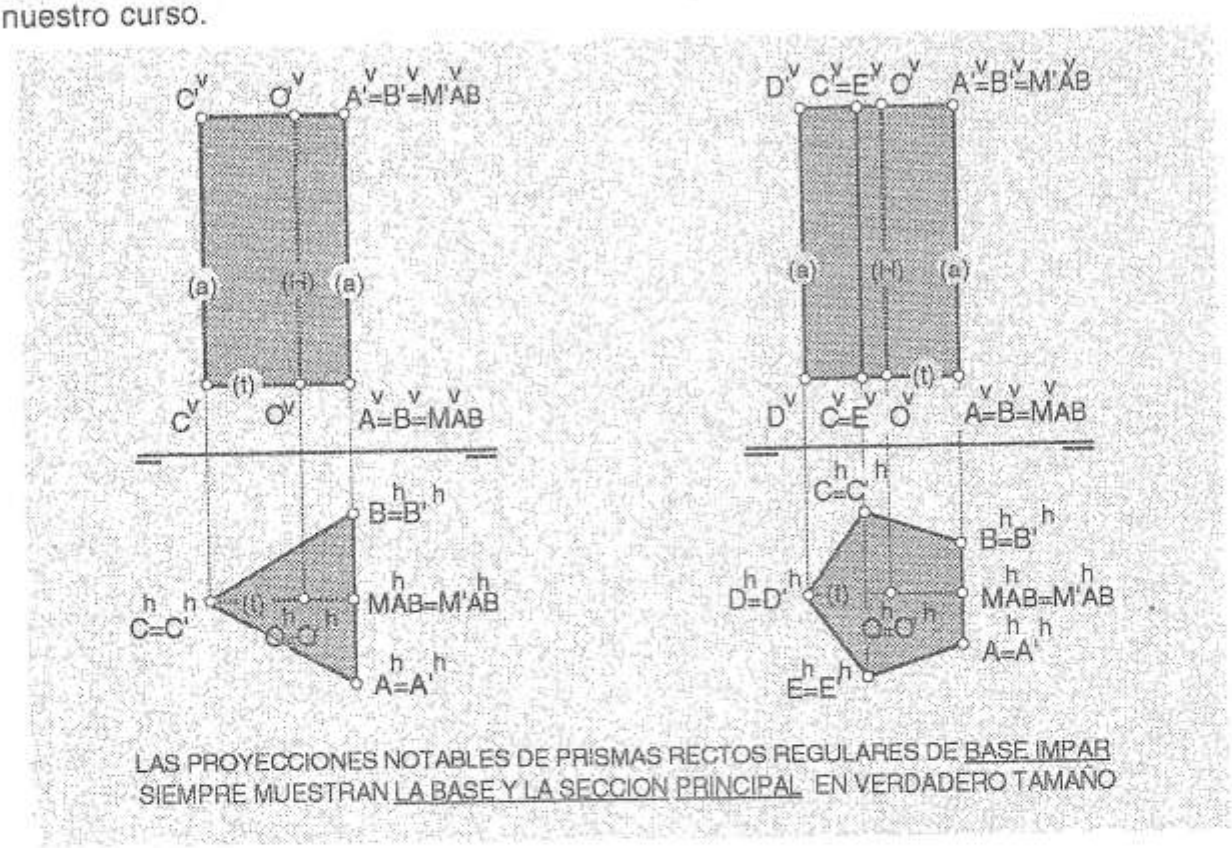


LAS PROYECCIONES NOTABLES DE PRISMAS RECTOS REGULARES DE BASE PAR SIEMPRE MUESTRAN LA BASE Y LA SECCION PRINCIPAL EN VERDADERO TAMAÑO

LAS PROYECCIONES NOTABLES DE PRISMAS RECTOS REGULARES DE BASE PAR SIEMPRE MUESTRAN LA BASE Y LA SECCION DIAGONAL EN VERDADERO TAMAÑO

las pirámides cuando nos ofrecen sus proyecciones notables; es decir, siempre que uno de estos poliedros muestre su base o alguna de sus secciones típicas en

Verdadero Tamaño, estaremos en presencia de una proyección notable, tal como lo muestran las figuras de la página precedente y de esta misma peagina, donde hemos reproducido las proyecciones notables de los prismas que trataremos en nuestro curso.



LAS PROYECCIONES NOTABLES DE PRISMAS RECTOS REGULARES DE BASE IMPAR SIEMPRE MUESTRAN LA BASE Y LA SECCION PRINCIPAL EN VERDADERO TAMAÑO

SOLIDOS DE REVOLUCION.

Los sólidos de revolución, los cuales pueden ser tambien rectos y oblicuos, son aquellos cuya superficie es invariablemente generada por la trayectoria que describe un elemento geométrico cuando gira alrededor de un eje. Los conos y los cilindros de revolución, la esfera, el toro, son ejemplos de superficies de revolución.

10. POLIEDROS

SOLIDOS REGULARES.

Llamados tambien solidos platónicos en honor a quien se dedicó por primera vez a su estudio, comprenden aquellos poliedros en los cuales todas sus caras son poligonos regulares iguales.

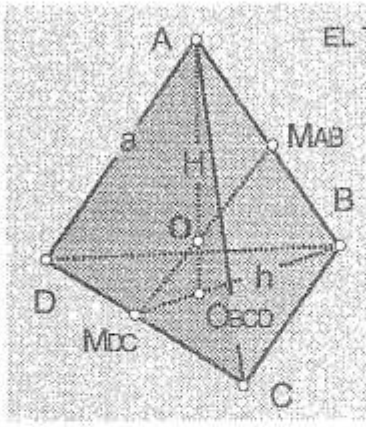
Los Poliedros Regulares son solo cinco: el TETRAEDRO (4 caras triangulares equiláteras), el CUBO o HEXAEDRO (6 caras cuadradas), el OCTAEDRO (8 caras triangulares equiláteras), el DODECAEDRO (12 caras pentagonales) y el ICOSAEDRO (20 caras triangulares equiláteras), de los cuales nuestro curso solo cubrirá el estudio detallado de los dos primeros.

A diferencia de los poliedros anteriores, los elementos geométricos que constituyen cada uno de los sólidos regulares, guardan entre sí una relación de proporcionalidad inalterable, de modo que cuando la dimensión de alguno de ellos es modificada, tambien se alteran —en forma proporcional— las dimensiones de los restantes, lo que resulta solamente en una modificación del tamaño del sólido. De esta manera, un poliedro regular cualquiera, no importa cual sea su tamaño, siempre conservará sus proporciones, y consecuentemente sus propiedades.

Podríamos decir pues, que cada uno de ellos se comporta como un sistema, pues la modificación de la magnitud de uno de sus componentes afecta a la magnitud total del cuerpo geométrico. Esta propiedad es también característica de la Esfera, la cual podría interpretarse como si fuese un poliedro regular con un número infinito de caras.

EL TETRAEDRO

El Tetraedro es un poliedro regular limitado por 4 CARAS triángulares equiláteras, que comparten 4 VÉRTICES y que se intersectan según 6 ARISTAS. Este poliedro representa la mínima expresión de los poliedros regulares, donde se combinan el menor número posible de un mismo polígono regular y el menor número de aristas. La figura siguiente nos muestra sus componentes fundamentales.



EL TETRAEDRO Y SUS ELEMENTOS CONSTITUYENTES

Vértices	A, B, C y D	4
Aristas (a)	AB, AC, AD, BC, CD y DB	6
Caras	ABC, ACD, ADB y BCD	4
Altura del Sólido (H)	AOBCD	4
Altura de Cara (h)	BMDC	12
Distancia entre aristas opuestas	MDC-MAB	3
Centro de Cara	OBCD	4
Centro del sólido	O	1

RELACIONES ENTRE ELEMENTOS SEMEJANTES DEL TETRAEDRO.

Los Vértices. En un Tetraedro se cumple que todos los vértices son adyacentes entre sí. Veamos; todos los vértices se ubican uno al lado de otro, de manera que entre ellos siempre hay una relación de proximidad, adyacencia, o consecutividad establecida a lo largo de las aristas. Siempre, en todo poliedro, los vértices consecutivos están separados por aristas.

Las Aristas. Mientras ello ocurre, las aristas guardan dos tipos de relación: son adyacentes , o son opuestas. Las aristas, por una parte, se reunen en grupos de tres sobre cada uno de los vértices formando siempre 60º entre sí, y de ellas se dice que son adyacentes precisamente porque comparten un vértice (AB, AC y AD; AB, CB y DB; CA, CB y CD; y AD, BD y CD). De aquellas aristas que no tienen

vértices comunes se dice que son opuestas y en el tetraedro integran tres pares ortogonales (AB y CD, AC y BD, y BC y DA) .

Las caras. Las caras por su parte, guardan siempre una relación de adyacencia, lo cual se evidencia cuando observamos que cada una de ellas comparte sus respectivas aristas con las tres caras restantes.

SECCIONES TÍPICAS DEL TETRAEDRO.

Una aproximación mas detallada al Tetraedro nos permitirá reconocer aún otros elementos importantes de su constitución morfológica.

LA SECCION PRINCIPAL ABMDC, MUESTRA EL VT Y LA DISPOSICION DE TODOS LOS SEGMENTOS CONTENIDOS EN EL TETRAEDRO

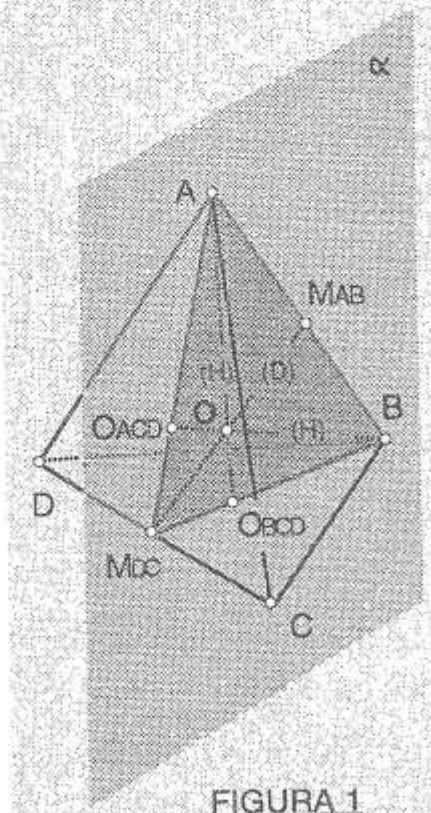


FIGURA 1

ABC es una Cara

MAB, MCD, MAC Y MAD son puntos medios de aristas

BMAC, AMBC y CMAB son alturas de cara

ABMCD es una Sección Principal

OBCD y OACD son Centros de Cara

AOBCD y BOACD son Alturas del Sólido

O es Centro del Sólido

MAB MDC es una Distancia entre Aristas Opuestas

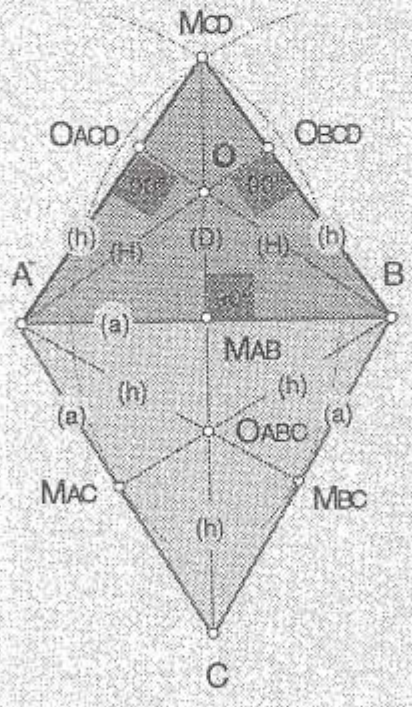


FIGURA 2

Para ello, vamos a seccionarlo en dos partes iguales mediante un plano (α) que pase por una de sus aristas (AB), y por el punto medio (M_{DC}) de la arista opuesta (DC), como se muestra en la figura 1 de la ilustración anterior. La sección producida de esta manera sobre el poliedro se llama SECCIÓN PRINCIPAL.

Este plano se intersecta con el poliedro generando un triángulo isósceles (ABM_{CD}) que se llama SECCION PRINCIPAL, la cual está limitada por dos catetos que corresponden a dos alturas (h) de cara (AM_{CD} y BM_{CD}) y otro que corresponde a una arista (AB). Toda vez que cada Sección Principal contiene una arista, sabremos en consecuencia, que todo tetraedro contiene seis secciones principales.

Dentro de cada Sección Principal podemos ubicar los cuatro SEGMENTOS FUNDAMENTALES del tetraedro, los cuales son: 1- LA ALTURA DEL POLIEDRO (H), la cual se identifica en aquellos comprendidos entre un vértice cualquiera y el centro (O) de la cara opuesta, 2- LA DISTANCIA ENTRE ARISTAS OPUESTAS (D), la cúal está representada por aquellos que unen los respectivos puntos medios de las mismas, 3- LA ARISTA (a), representada por el cateto mayor y 4- LA ALTURA DE CARA (h), representada por los dos catetos menores. Por otra parte, la altura del poliedro (H) es perpendicular a la cara por cuyo centro pasa, así como la distancia "D" es el segmento de perpendicular común comprendido entre las aristas opuestas.

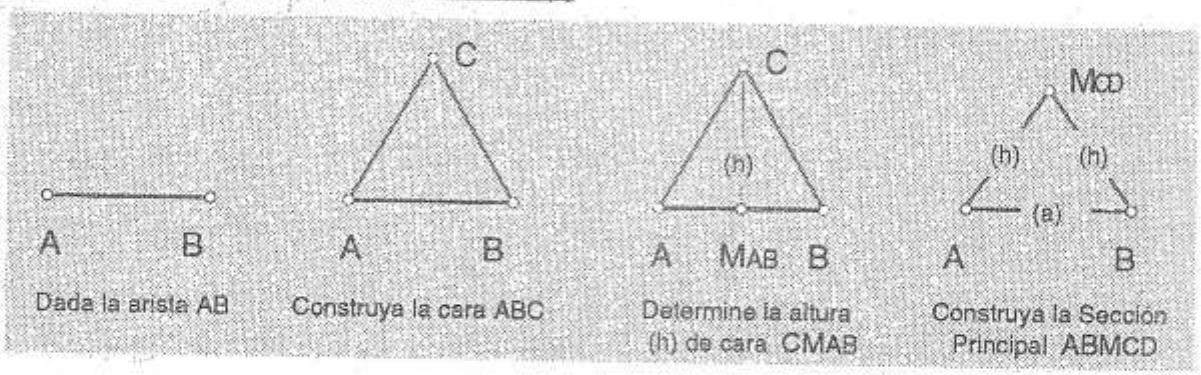
Dentro de la Sección Principal mostrada en su magnitud real en la figura 2, observamos que las alturas del sólido (H) están respectivamente representadas por los segmentos de perpendicular trazados desde los vértices A y B hasta las alturas de cara BM_{DC} y AM_{DC}. Así mismo, la distancia "D" es el segmento de perpendicular trazado desde el punto medio M_{DC}, hasta la arista AB. También

observamos que dentro de las caras, sus centros respectivos se encuentran ubicados sobre las alturas de cara (h) a 1/3 h de las aristas y a 2/3 h de los vertices.

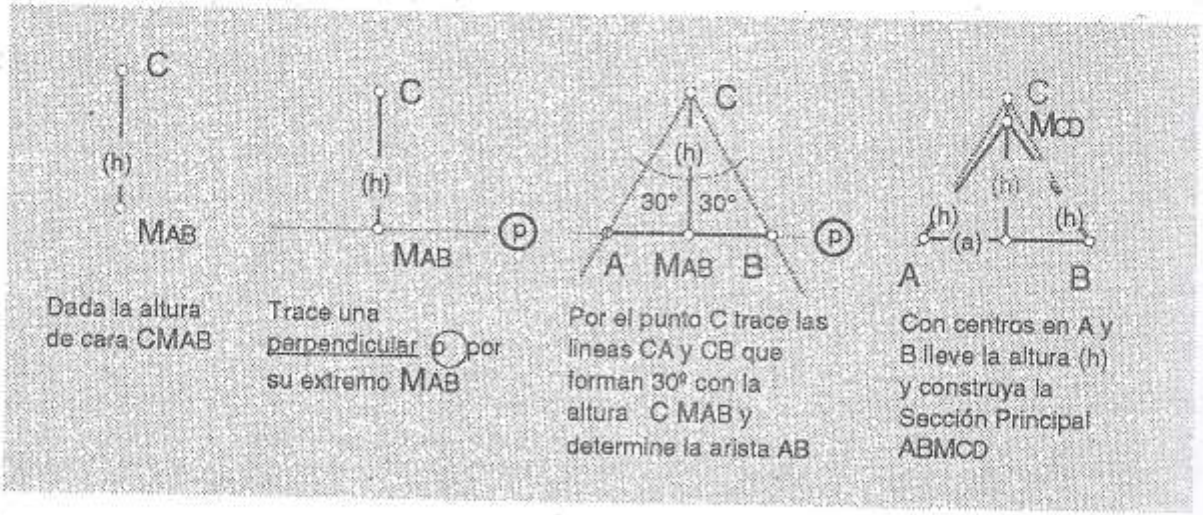
CONSTRUCCIÓN DE LA SECCIÓN PRINCIPAL.

Para construir la sección principal basta con conocer al menos uno de los segmentos fundamentales del tetraedro. En cada caso se aplica un procedimiento distinto semejante a los explicados a continuación.

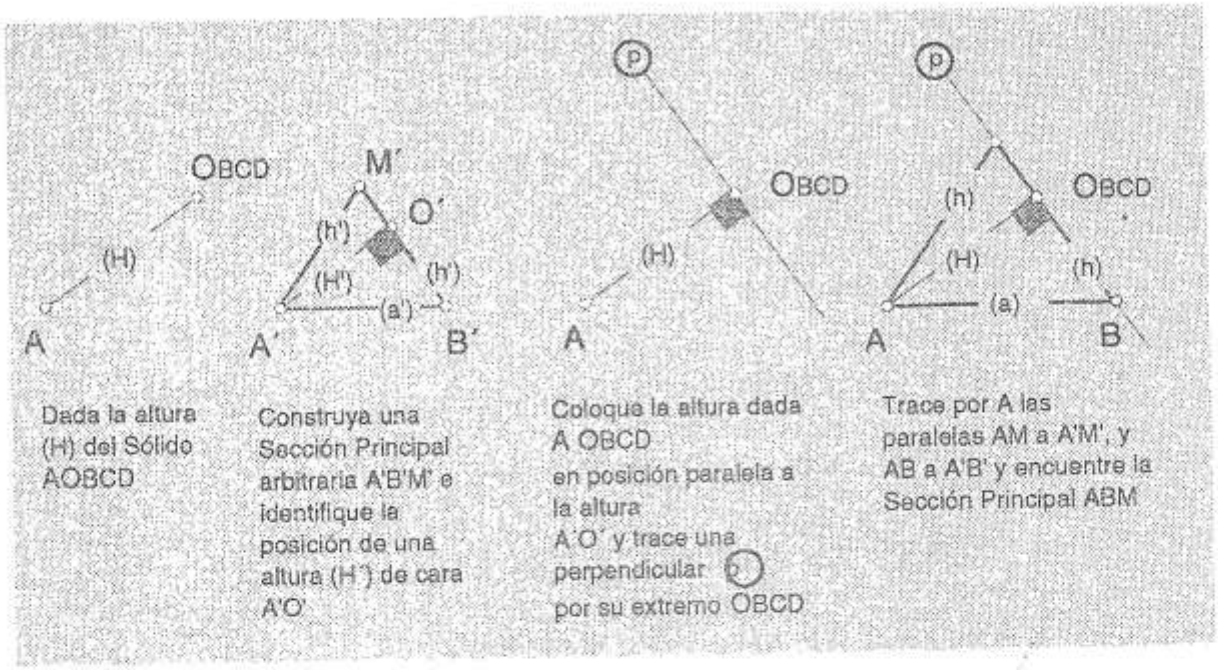
SI EL SEGMENTO CONOCIDO ES UNA ARISTA (a)



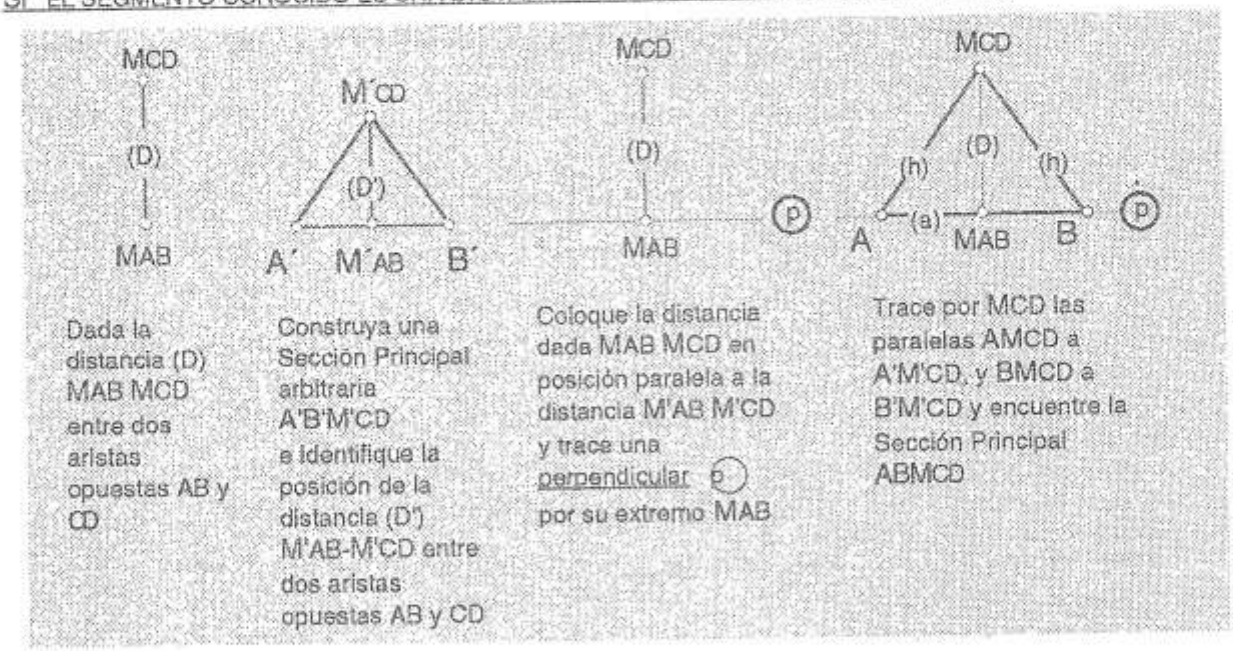
SI EL SEGM ENTO CONOCIDO ES UNA ALTURA DE CARA (h)



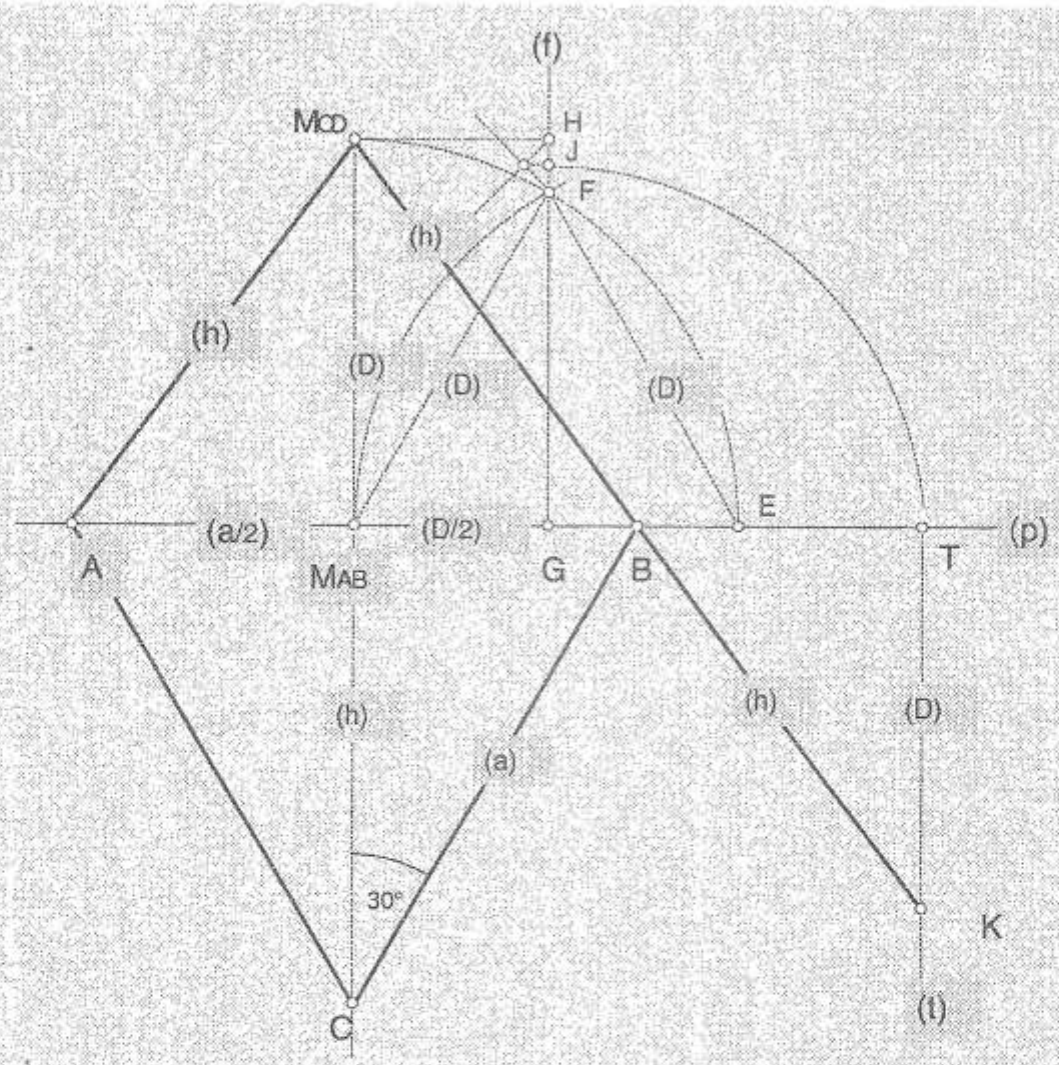
SI EL SEGMENTO CONOCIDO ES UNA ALTURA DE L SOLIDO (H)



SI EL SEGMENTO CONOCIDO ES UNA DISTANCIA ENTRE ARISTAS OPUESTAS (D)



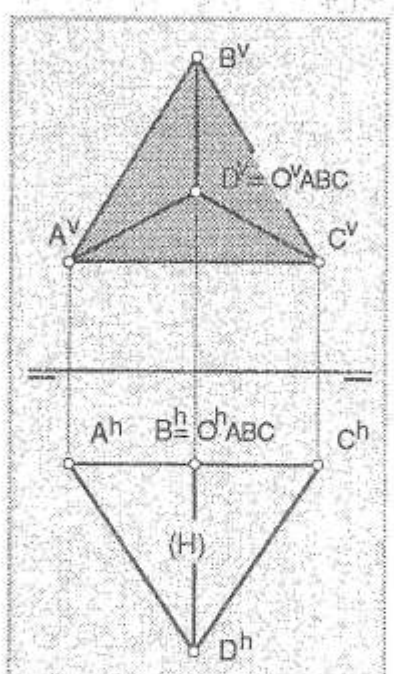
Observe que este procedimiento recurre a la comparación de la altura dada con la altura de un sólido de tamaño arbitrario, para reconstruir —por la vía de las relaciones de proporcionalidad— la sección principal del sólido buscado y así reconocer las magnitudes respectivas de todos sus elementos. No obstante, para llegar al mismo resultado, es posible aplicar el procedimiento siguiente.



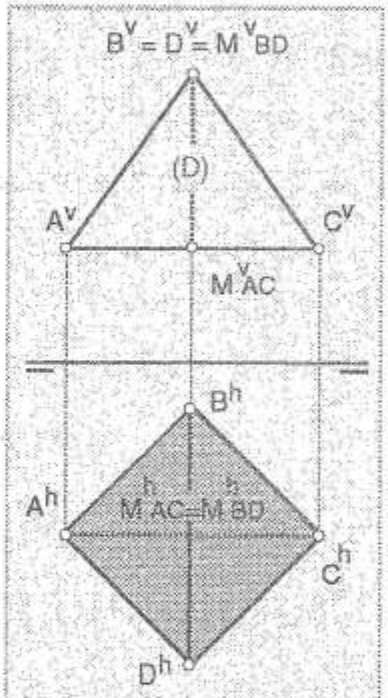
1- Por MAB trace una perpendicular (p) a la distancia (D).
2- Con radio (D) y centro MAB, trace un arco que corte a la recta (p) en "E".
3- Con radio (D) y centro "E", trace un arco que corte al arco anterior en "F".
4- Por "F" trace la perpendicular(f) a la recta (p)y encuentre el punto "G" de intersección entre ambas.
5- Por MCD trace una paralela a la recta (p) y encuentre elpunto "H" de intersección con la recta (f).
6- Determine el punto medio "J" del segmento "FH".
7- Con centro en "G" y radio "JG" corte la recta "p" en el punto "T".
8- Trace por "T" la recta (t) perpendicular a la recta (p).
9- A partir de "T" copie sobre la recta (t) la distancia (D)y encuentre el punto "K".
10- Una los puntos "K" y "MCD" y encuentre el punto "B" sobre la recta (p).
11- Con centro en "MAB" y radio "BMAB" determine el punto"A" sobre la recta (p)
12- **ABMCD es la Sección Principal buscada**

LAS POSICIONES NOTABLES DEL TETRAEDRO

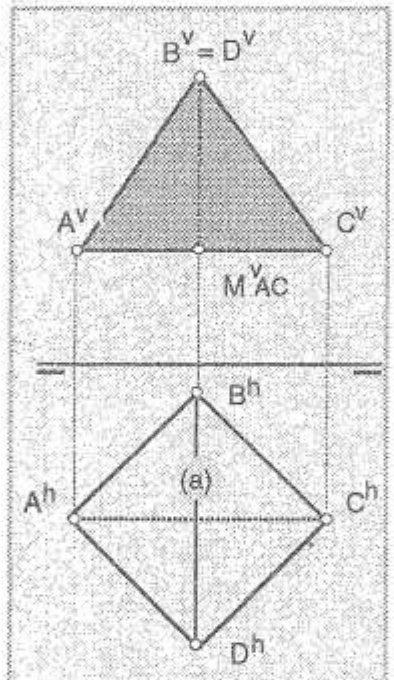
Siempre que un Tetraedro se ubique frente a un plano de proyección de modo que al menos uno de sus segmentos fundamentales sea perpendicular a dicho plano, es decir, se comporte como una recta DE PIE o una Recta DE PUNTA, diremos que su imagen ortogonal sobre dicha superficie, es una proyección notable. El Tetraedro tiene tres proyecciones notables, ilustradas en las figuras siguientes.



La proyección vertical del Tetraedro ABCD se presenta como una proyección notable, debido a que su altura (H) "D OABC" es perpendicular al plano vertical de proyección. Cuando esto ocurre, el contorno de la proyección es siempre un TRIANGULO EQUILATERO que representa la CARA del Tetraedro.



La proyección horizontal del Tetraedro ABCD representa una proyección notable, debido a que su distancia (D) "MAC MBD" es perpendicular al plano horizontal de proyección. Cuando esto ocurre, el contorno de la proyección notable es siempre un CUADRADO cuya diagonal es igual a la arista del Tetraedro.

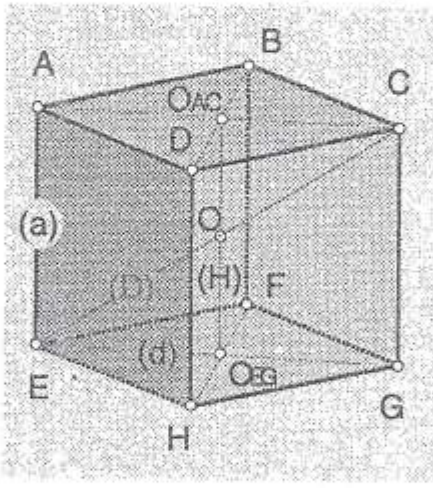


La proyección vertical del Tetraedro ABCD representa una proyección notable, debido a que una de sus aristas (a) "BD" es perpendicular al plano vertical de proyección. Cuando esto ocurre, el contorno de la proyección notable es siempre un TRIANGULO ISOSCELES que reproduce a la Sección Principal del Tetraedro.

Observe cuidadosamente que cada proyección notable está acompañada de la proyección puntual del segmento que la determina. Es obvio pues, que estas imágenes puedan aparecer indistintamente sobre cualquiera de los planos de proyección. Ello solo depende de que el segmento determinante sea DE PIE o DE PUNTA .

EL CUBO O HEXAEDRO

El Cubo es un poliedro regular limitado por 6 CARAS cuadradas, que se intersectan respectivamente según 12 ARISTAS las cuales concurren respectivamente en grupos ortogonales de tres por cada uno de sus 8 VÉRTICES. Los Elementos fundamentales que constituyen el Cubo son descritos en la figura siguiente.



EL CUBO Y SUS ELEMENTOS CONSTITUYENTES

Vértices	A,B,C,D,E,F,G y H	8
Aristas (a)	AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, DH, CG y BF	12
Caras	ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, CDHG y ADHE	6
Altura del sólido (H)	OACOEG	3
Diagonal de cara (d)	EG	12
Diagonal Principal (D)	EC	4
Centro del Poliedro	O	

De los elementos señalados se distinguen las aristas (a), las diagonales de cara (d) y las diagonales principales (D), como segmentos fundamentales del poliedro. Conviene anotar que la altura del Cubo (H), es un elemento de menguada utilidad como segmento de referencia. Toda vez que ella es paralela y de la misma magnitud que las aristas, en general, cuando se enuncian problemas que involucran dicha altura, en su lugar se hace referencia preferiblemente a aquellas para indicar posición y magnitud.

RELACIONES ENTRE ELEMENTOS SEMEJANTES DEL CUBO

Los Vértices. A diferencia del Tetraedro, donde todos sus vértices guardan una relación de adyacencia, el comportamiento de los vértices del Cubo en este particular, presenta tres variaciones. Cuando dos vértices están separados por una **arista** (a), decimos de ellos que son **consecutivos**. (AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, DH, CG, y BF). Por otra parte, cuando la separación entre dos vértices está determinada por una **diagonal** (d), los consideramos como vértices **alternos**, como es el caso de los pares AC, AH, AF, BD, BE, BG, CH, CF, DE,DG, FH y EG. Finalmente, de aquellos pares de vértices separados por las **diagonales principales** (D), decimos que son **opuestos** (AG, BH, EC y DF). No pierda de vista que la identificación de estas relaciones se simplifica notablemente cuando las asociamos a los segmentos fundamentales del Cubo, tal como lo sugieren respectivamente los subrayados en el texto.

Las Aristas. Las relaciones entre pares de aristas en el Cubo son cuatro. En efecto, dos aristas del Cubo son **adyacentes** cuando comparten un vértice, y de este modo se agrupan ortogonalmente en ocho tríos que corresponden al número de vértices del poliedro (vg.: AB, AE y AD). Adicionalmente, cuando la distancia entre dos aristas es establecida por otra, decimos que son alternas; sin embargo esta situación muestra dos variantes cuando dos aristas son **alternas paralelas** (vg.: AB y CD) o cuando son **alternas ortogonales** (vg.: AB y CG). Finalmente, cuando un par de aristas está separado por diagonales de cara (d), siempre son paralelas y decimos que son **opuestas** (vg.: AB y HG).

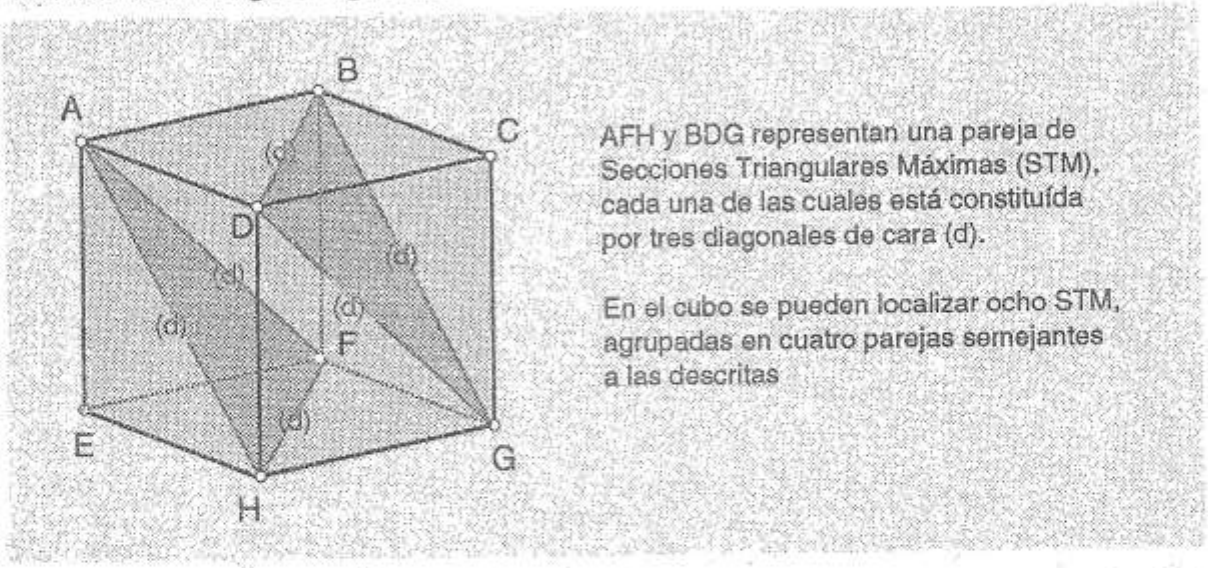
Las Caras. Las caras del cubo se relacionan entre sí en pares de caras **opuestas**, como ABCD y EFGH; o en pares **adyacentes** como lo son ABCD y CDGH, caso en el cual siempre comparten una arista, tal como lo representa CD en la figura correspondiente.

10. POLIEDROS

SECCIONES TIPICAS DEL CUBO

Sección Triangular Máxima.

Todo plano que pase por tres vértices alternos de un cubo produce una Sección Triangular Máxima (STM). De este modo, la STM es un triángulo equilátero cuyos lados equivalen a las diagonales de cara (d) del sólido, tal como podemos observarlo en la figura siguiente.



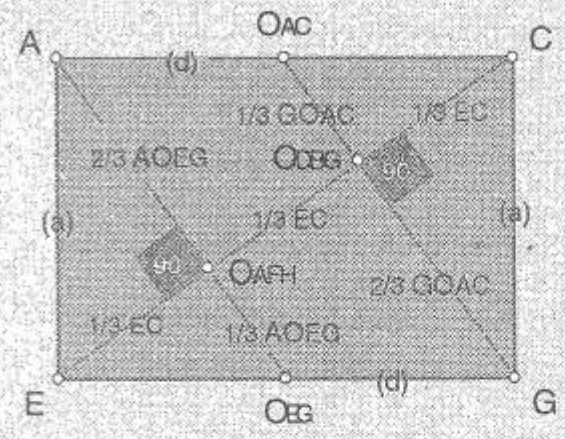
Sección Principal.

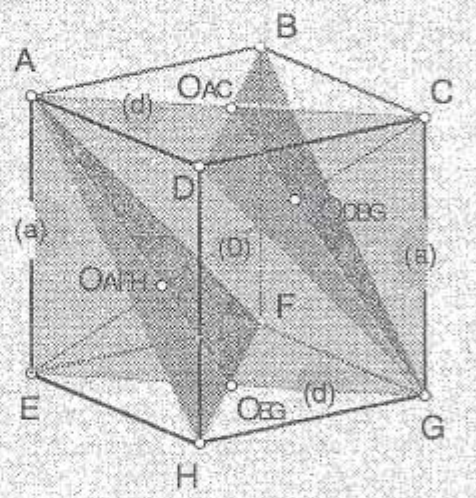
La sección producida sobre un cubo por un plano como "α", que contenga a dos de sus aristas opuestas, recibe el nombre de Sección Principal. Ella es un componente de importancia central en el estudio de las relaciones internas entre los distintos elementos del poliedro, debido a que ella los alberga a todos, sin excepción. En las ilustraciones siguientes podemos verificar la presencia de aristas, diagonales de cara y diagonales principales, además de la existencia de otros elementos adicionales como las alturas de las STM, (Centro de cara a vértice de cara opuesta), y las distancias entre dos STM paralelas (AFH y DBG) y de estas a los vértices que ellas no contienen ("C" y "E").

La Sección Principal es un rectángulo determinado por dos aristas opuestas (AE y CG) y dos diagonales paralelas de caras opuestas (AC y EG). Su diagonal (EC) corresponde a una diagonal principal del sólido.

Observe que dicha diagonal (EC) al intersectarse con las alturas (AOEG y GOAC) de las STM en los puntos OAFH y ODBG (centros de las mismas), queda dividida en tres segmentos iguales, y a su vez dichas alturas son divididas en segmentos correspondientes a 1/3 y 2/3 de sus magnitudes.

Toda vez que un cubo cuenta con 12 aristas, dentro de él pueden localizarse 6 secciones principales.





La figura muestra una Sección Principal ACGE de un Cubo ABCDEFGH, en la posición que ocupa dentro de él, relacionada a una pareja de Secciones Triangulares Máximas AFH y DBG —paralelas entre sí— con las que además de guardar una evidente relación de perpendicularidad, se intersecta respectivamente a lo largo de los segmentos AOEG y GOAC, correspondientes a las alturas de dichas STM. Observe además que las intersecciones (OAFH y ODBG) entre la Diagonal Principal (D) EC con las STM representan los centros de las mismas.

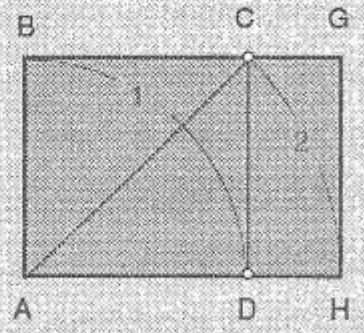
Entre otras cosas, es muy interesante descubrir que las STM paralelas (AHF y BDG) se ordenan en parejas donde una está invertida con respecto a la otra y que además, aquellos vértices que ellas no contienen determinan a una Diagonal Principal (EC) que es perpendicular a ellas. Por otra parte, los puntos de intersección entre esa Diagonal Principal y su pareja de STM ortogonales, además de representar los respectivos centros de dichas STM, dividen a esa diagonal

principal en tres segmentos exactamente iguales, naturalmente, de dimensiones equivalentes a 1/3 de la magnitud de dicha diagonal principal. Como sabemos de antemano que la posición del centro de un triángulo equilátero sobre la altura (h) del mismo, dista 2/3 h del vértice y 1/3h del punto medio del lado opuesto, nos percatamos también de la presencia de esa relación sobre las STM.

CONSTRUCCION DE LA SECCION PRINCIPAL

La Sección Principal del cubo puede ser construída siempre que se conozca al menos uno de sus segmentos fundamentales. Los procedimientos gráficos que respectivamente se aplican a su construcción, como lo veremos a continuación, son sencillos pues tienen sus principios en las relaciones espaciales primarias que se dan entre los segmentos fundamentales del poliedro, tal como se explica a continuación.

Construcción de la Sección Principal conocida una arista (a).

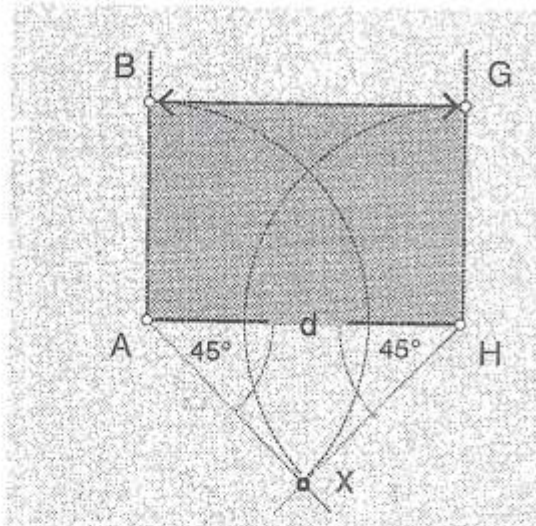


La arista AB es conocida. Al girarla alrededor de "A" mientras describe el arco 1 encontramos a "D". El mismo arco, centrado respectivamente en "B" y en "D", nos conduce a "C", y así hallamos el cuadrado ABCD.

La diagonal "AC" del cuadrado, al girar alrededor de "A", es radio del arco 2 que permite hallar a "H", y seguidamente a "G", al trazar por "H" la perpendicular dada por la dirección de "GH".

El rectángulo ABGH representa la Sección Principal

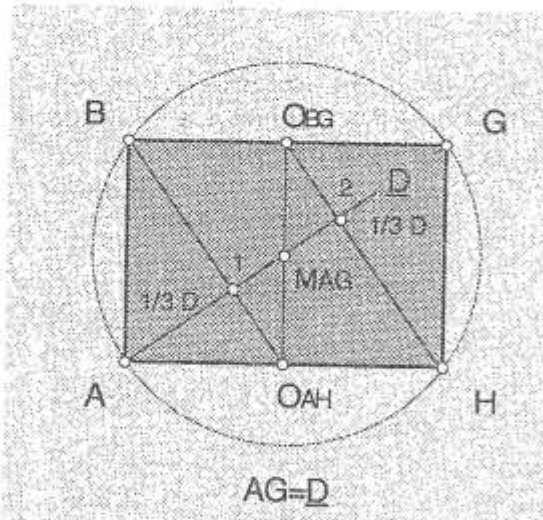
Construcción de la Sección principal conocida la diagonal de cara (d).



Conocida la diagonal de cara AH es posible determinar el tamaño real de la arista del cubo, localizando la posición del punto X, al trazar por dichos puntos líneas que formen 45º con AH.

Arcos respectivamente centrados en A y H permiten encontrar a los puntos "B" y "G" sobre las perpendiculares trazadas por los extremos de la diagonal.

Construcción de la Sección Principal conocida la Diagonal Principal (D).

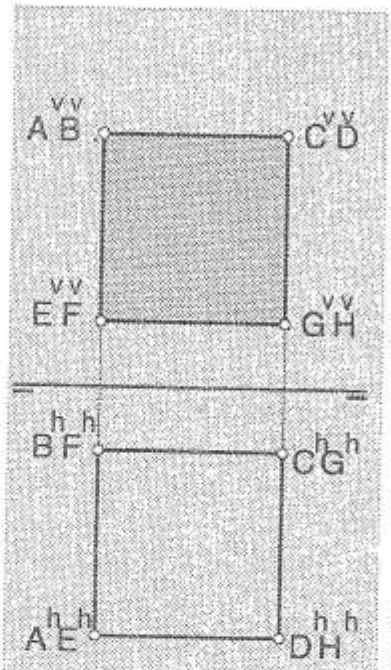


En este caso, el teorema del Arco Capaz aporta la solución a la construcción de la Sección Principal. Un arco de radio igual a la mitad de la diagonal principal centrado en el punto medio (MAG) de la misma, se corta en los puntos "B" y "H" con las perpendiculares a ella, trazadas por los puntos "1" y "2" que distan 1/3 D de los vértices "G" y "A".

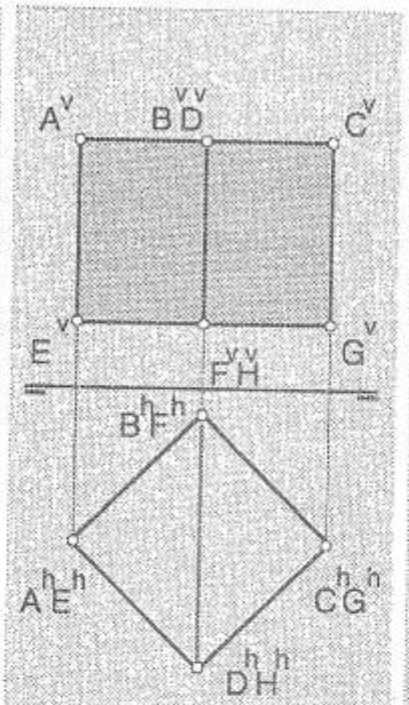
Esas perpendiculares representan las alturas (HOBG y BOAH) de las STM que son ortogonales a la Diagonal "D"

POSICIONES NOTABLES DEL CUBO.

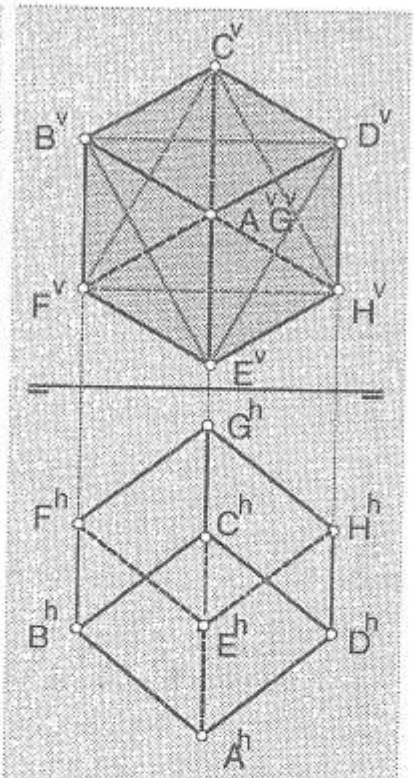
De modo semejante a lo que hemos venido señalando con respecto al Tetraedro, tambien el Cubo se proyecta en posición notable siempre que alguno de sus segmentos fundamentales sea perpendicular al plano de proyección considerado, es decir, se muestre en posición DE PIE o DE PUNTA.



Un cubo como "ABCDEFGH", cuyas aristas son respectivamente ortogonales a ambos planos de proyección muestra sus imágenes en posición notable sobre ambas superficies.
En este caso las proyecciones obtenidas son cuadrados de superficie exactamente igual a la de las caras del poliedro, toda vez que ellas se muestran en su magnitud real.



Un Cubo como "ABCDEFGH", en una posición tal que alguna de sus diagonales de cara sea perpendicular a uno de los planos de proyección, muestra su imagen sobre ese plano en posición notable.
Ese es el caso de la proyección vertical del poliedro representado, el cual, debido a que sus diagonales de cara "BD" y "FH" se comportan como rectas DE PUNTA se revela en posición notable sobre el plano vertical de proyección.
Dicha proyección representa a la Sección Principal "ACGE"

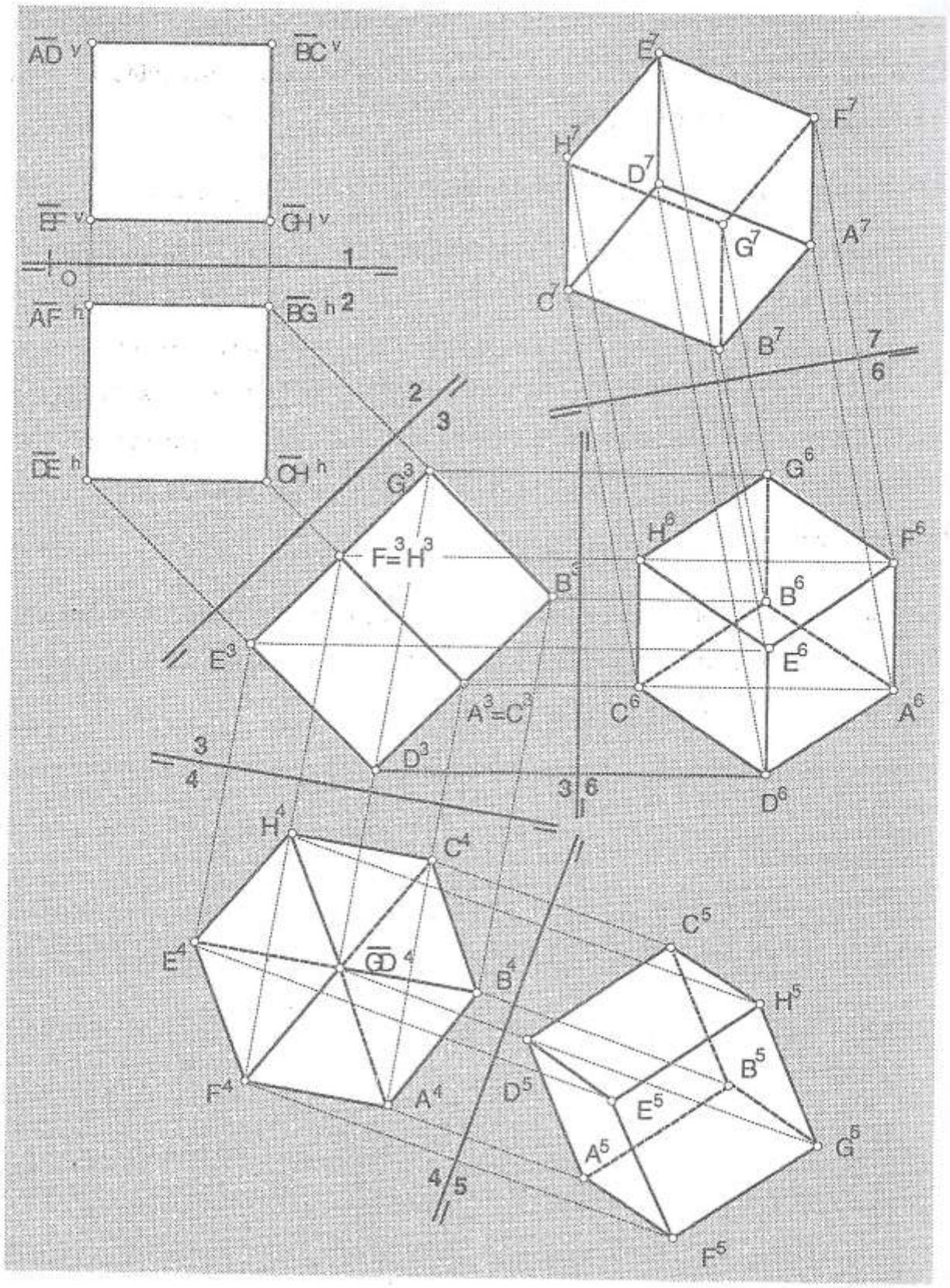


Cuando un Cubo como el de la figura ocupa una posición tal que una diagonal principal (AG) es ortogonal a uno de los planos de proyección (PV), la imagen del sólido sobre ese plano revela una proyección notable, cuya forma es la de un hexágono regular.
Por otra parte, observe cuidadosamente que el par de STM "BED" y "FCH" quedan reproducidas en verdadero tamaño, en una disposición semejante a la de una estrella de David.

La existencia de tres segmentos fundamentales en el cubo -arista (a), diagonal de cara (d) y diagonal principal (P)- se traduce entonces en la existencia de tres proyecciones notables, cuyas propiedades generales están descritas en las ilustraciones de la página anterior.

Como lo han evidenciado los ejercicios de construcción de poliedros que hemos venido realizando , la utilidad de las proyecciones notables consiste básicamente en que, aún siendo imprescindibles al aplicar el cambio de planos a la resolución de estos problemas, simplifican ostensiblemente el proceso constructivo al mostrarnos las imágenes respectivas de los sólidos bajo la apariencia de figuras planas, cuya construcción es mas sencilla, y a las cuales podemos acceder mediante la aplicación de procedimientos con los cuales ya estamos ampliamente familiarizados.

En la figura de la página siguiente podremos observar una secuencia de imágenes de un cubo, obtenidas por cambio de planos donde las proyecciones 1, 2, 3 y 4 representan posiciones notables del mismo.


AD v
BC v
EF v
GH v
1
O
AF h
BG h 2
DE h
CH h
2
3
E7
F7
H7
D7
G7
A7
C7
B7
7
6
G3
F=3H3
B3
E3
A3=C3
D3
3
4
G6
H6
F6
B6
E6
C6
A6
D6
3 6
H4
C4
E4
GD 4
B4
F4
A4
C5
H5
B5
D5
E5
A5
G5
4 5
F5

CUESTIONARIO

1. ¿Qué es un Poliedro?
2. ¿Qué es un sólido Recto?
3. ¿Cuáles son los elementos que conforman la sección principal de una pirámide recta de base impar?
4. ¿Cuál polígono configura la sección principal de una pirámide recta de base impar?
5. ¿Cuáles son los elementos que conforman la sección diagonal de una pirámide recta?
6. ¿Cuál polígono configura la sección diagonal de una pirámide recta?
7. ¿Cuál polígono configura la sección principal de una pirámide recta de base par?
8. ¿Cuáles son los elementos que conforman la sección principal de una pirámide recta de base par?
9. ¿Cómo se reconoce una proyección notable de una pirámide o un prisma recto?
10. ¿Qué es un Poliedro Regular?
11. Cuáles son los Poliedros Regulares?
12. Cuál es la cualidad fundamental que diferencia a los Poliedros Regulares de los sólidos rectos?
13. ¿Cuál relación guardan entre sí los vértices de un Tetraedro?
14. ¿Cuáles relaciones guardan entre sí las aristas de un Tetraedro?
15. ¿Cuál relación guardan entre sí las caras de un Tetraedro?
16. ¿Cuáles relaciones guardan entre sí los vértices de un Cubo?
17. ¿Cuáles relaciones guardan entre sí las aristas de un Cubo?
18. ¿Cuáles relaciones guardan entre sí llas caras de un Cubo?
19. ¿Qué es la Sección Principal de un Tetraedro?
20. ¿Si una cara "ABC" de un Tetraedro es paralela a LT, en cuál posición está la altura del sólido que contiene al vértice "D" ?
21. ¿Si la base de una Pirámide Recta Regular está sobre un plano Paralelo aLT, en cuál posición está su eje ?
22. ¿Si la altura "OB" de un Tetraedro es Horizontal, en cuál posición está su cara "ACD"?
23. ¿Si la Diagonal Principal de un Cubo está en posición Cualquiera, en cuál posición están las Secciones Triangulares Máximas que no contienen sus vértices?
24. ¿Que condición debe cumplirse para que una proyección notable de un Cubo muestre en VT su Sección Principal ?
25. ¿Si las aristas opuestas de un Tetraedro son ambas Paralelas a LT, en cuál posición están las respectivas Secciones Principales que las contienen ?
26. ¿En general, si una arista de un Cubo es De Perfil, en cuál posición están sus aristas alternas ortogonales?
27. ¿Que condición debe cumplirse para que una proyección notable de un Cubo se vea como un Hexágono ?

28. ¿En general, si la Distancia entre dos Aristas Opuestas de un Tetraedro es De Punta, en cuál posición están dichas aristas?

29. ¿Que condición debe cumplirse para que una proyección notable de un Tetraedro se vea como un Cuadrado ?

30. ¿En general, si la arista AB de la base de una Pirámide Recta Regular Hexagonal es De Punta, en cuál posición está su cara opuesta VDE?

31. ¿En general, si la arista AB de la base de una Prisma Recto Regular Pentagonal es Paralela a LT, en cuál posición está su arista opuesta DD' ?

32. ¿Qué es la Sección Principal de un Cubo?

33. ¿Qué es la Sección Triangular Máxima de un Cubo?

34. ¿Cómo se reconoce una proyección notable de un Tetraedro?

35. ¿Cómo se reconoce una proyección notable de un Cubo?

36. ¿Cuál es la configuración de la proyección notable que nos muestra un Cubo cuando su arista es perpendicular al plano que nos ofrece dicha proyección?

37. ¿Cuál es la configuración de la proyección notable que nos muestra un Cubo cuando su diagonal de cara es perpendicular al plano que nos ofrece dicha proyección?

38. ¿Cuál es la configuración de la proyección notable que nos muestra un Cubo cuando su Diagonal Principal es perpendicular al plano que nos ofrece dicha proyección?

39. ¿Cuál es la configuración de la proyección notable que nos muestra un Tetraedro cuando su arista es perpendicular al plano que nos ofrece dicha proyección?

40. ¿Cuál es la configuración de la proyección notable que nos muestra un Tetraedro cuando su Distancia entre dos aristas opuestas es perpendicular al plano que nos ofrece dicha proyección?

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONSTRUCCION DE POLIEDROS.

La resolución de problemas de construcción de Poliedros en Doble Proyección Ortogonal es un proceso que, como todos los aplicados en Geometría Descriptiva, demanda no sólo el reconocimiento explícito de los eventos tal como ocurren en la realidad tridimensional y la comprensión exhaustiva de los mismos a través de su representación bidimensional, sino también conocer las cualidades particulares inherentes a los cuerpos cuyas proyecciones deseamos determinar. Consecuentemente, ello presupone el dominio de todos los conceptos que hemos venido estudiando y la habilidad de aplicarlos a través de los procedimientos propios de la DPO.

Una vez más, es importante recalcar la importancia de saber reconocer la configuración espacial (tridimensional) de los eventos geométricos, mediante su "lectura" a través de la representación diédrica, pues en esta habilidad radica, por una parte, la posibilidad de comprender la naturaleza de las relaciones existentes entre los elementos conocidos y aquellos a ser localizados para dar la solución correcta a los problemas, y por la otra, con el apoyo de las habilidades en el manejo de los procedimientos gráficos, la definición de las diversas alternativas, de los distintos caminos a través de los cuales los problemas pueden ser resueltos, y la escogencia del más conveniente para arribar a su solución.

Pero, ¿qué es resolver un problema de construcción de poliedros? Es simplemente determinar las proyecciones ortogonales de los vértices desconocidos, mediante la aplicación de una metodología que nos permita, partiendo de unos datos que representan una parte de él, la incorporación progresiva de los elementos que lo constituyen hasta revelar su apariencia definitiva.

EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA

La descripción verbal que nos revela la información básica que configura un problema es el ENUNCIADO. En términos generales, en él diferenciamos dos tipos de información, a saber : 1. Lo que se nos pide (la variable morfológica: el nombre del poliedro a construir), y 2. lo que se nos da, es decir, los datos, que se identifican en dos categorías: la descripción explícita de los elementos ofrecidos y sus relaciones con su contexto, planteadas bien en forma explícita o implícita; y las coordenadas de los puntos conocidos.

Los datos se complementan mutuamente, de modo que cada categoría puede contener información que la otra oculta , y en conjunto nos ofrecen las claves iniciales para resolver el problema. Nosotros debemos tender el puente entre el problema y su solución haciendo uso tanto de los conocimientos que tenemos al aplicar los procedimientos fundamentales de la DPO como del dominio de las relaciones geométricas propias del sólido a construir. Todo ello por supuesto -vale destacarlo- bajo el supuesto de que quien resuelve el problema, se desenvueve con soltura en el manejo de las técnicas fundamentales del dibujo instrumental.

En general, la resolución de problemas puede llevarse a cabo a través de dos metodologías (aditiva e integral), las cuales hemos venido manejando en forma diferenciada a lo largo del desarrollo de la materia. Aún cuando ambas formas de abordaje tienen fundamentos conceptuales diferentes, los procedimientos asociados a cada una, no son necesariamente excluyentes. Ello quiere decir simplemente que en las distintas fases de resolución de un problema cualquiera, podemos acudir a la aplicación del procedimiento que mas nos convenga de acuerdo a las condiciones particulares que afecten ese momento del proceso de resolución, aún cuando dicho procedimiento provenga de una u otra metodología. Así por ejemplo, el rebatimiento y el giro, pueden convivir como procedimientos auxiliares dentro del contexto del cambio de planos.

Sin embargo, atendiendo precisamente a las diferencias conceptuales que existen

entre ambas formas de interpretar un problema del espacio tridimensional, siempre conviene —en favor de la mayor claridad y coherencia metodológica— escoger previamente la metodología a seguir, porque ello permite, por una parte, establecer con precisión la estrategia de abordaje del problema por resolver, y por la otra, ordenar de una manera lógica y secuencial el proceso de resolución.

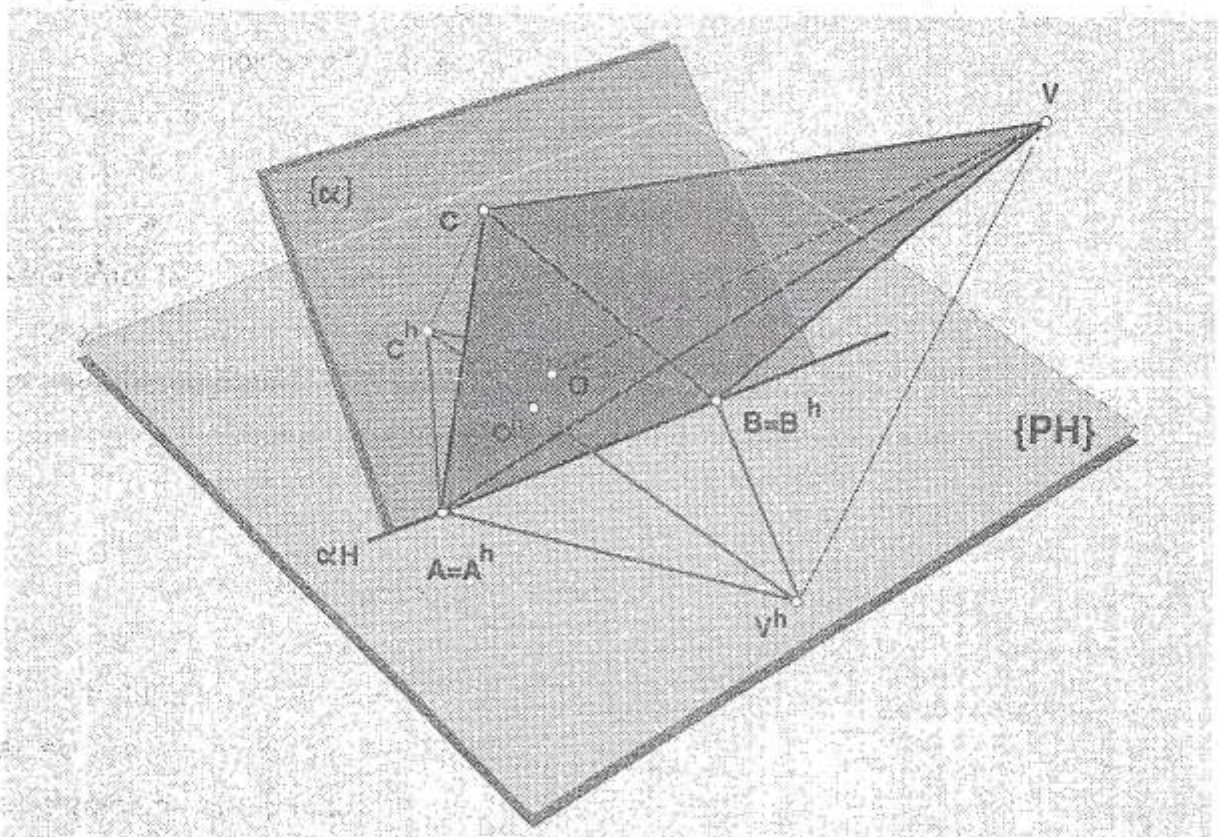
Esta afirmación se afianza en que ambas metodologías provienen de plataformas conceptuales distintas; ambas son, en síntesis, dos modos distintos de ver la realidad. Mientras la metodología aditiva disocia los componentes del problema para interpretarlo —desde dos puntos de vista fijos— como una sumatoria de partes, abordando el proceso de análisis y resolución como una adición sucesiva de recursos particulares ordenados en una secuencia lógica; la metodología integral se aproxima al problema como a una totalidad, sin disociarlo, y concibe su análisis a partir de la relación dinámica que establecemos como observadores con los eventos que percibimos, haciendo posible que su resolución se desarrolle exclusivamente dentro de los límites coherentes de un mismo marco conceptual. Mientras una puede eventualmente prescindir de la presencia de un sujeto que observa, la otra no puede subsistir sin nuestra participación permanente como perceptores de la realidad que observamos. Mientras una ve el problema congelado desde dos puntos de vista fijos y lo separa en secciones para poderlo resolver, la otra "ve", en una secuencia dinámica, cómo evoluciona la interacción mutua del conjunto de los elementos geométricos dentro de una totalidad, no solo en el espacio..... sino en el tiempo !

De modo pues que se trata de dos procesos de análisis tridimensional cuyos fundamentos son radicalmente distintos, y cuyas ventajas relativas dependen primariamente de la naturaleza del problema a resolver. No obstante, la experiencia nos permite asegurar una mayor ubicuidad en la aplicación de la metodología integral, la cual es oportuna en la resolución de problemas complejos para los cuales la metodología aditiva es insuficiente. Una discusión comparativa de ambas metodologías será mejor comprendida al abordar la resolución de

algunos problemas típicos de construcción de poliedros, como los que trataremos de inmediato.

1.- CONSTRUIR UNA PIRAMIDE RECTA DE BASE TRIANGULAR EQUILATERA ABC, APOYADA EN EL PLANO "α" CONOCIDO SU VERTICE PRINCIPAL "V", SABIENDO QUE LA ARISTA AB SE ENCUENTRA EN EL PLANO HORIZONTAL.

El primer paso a dar, antes siquiera de decidir cual metodologia vamos a utilizar, es imaginar la apariencia tridimensional del cuerpo a construir, de manera que los datos conocidos y las indicaciones del enunciado nos permitan evidenciar las relaciones existentes entre el poliedro y los datos. Nos figuramos así una imagen de la pirámide sobre la cual "calzamos" los datos y el resto de la información dada por el enunciado.

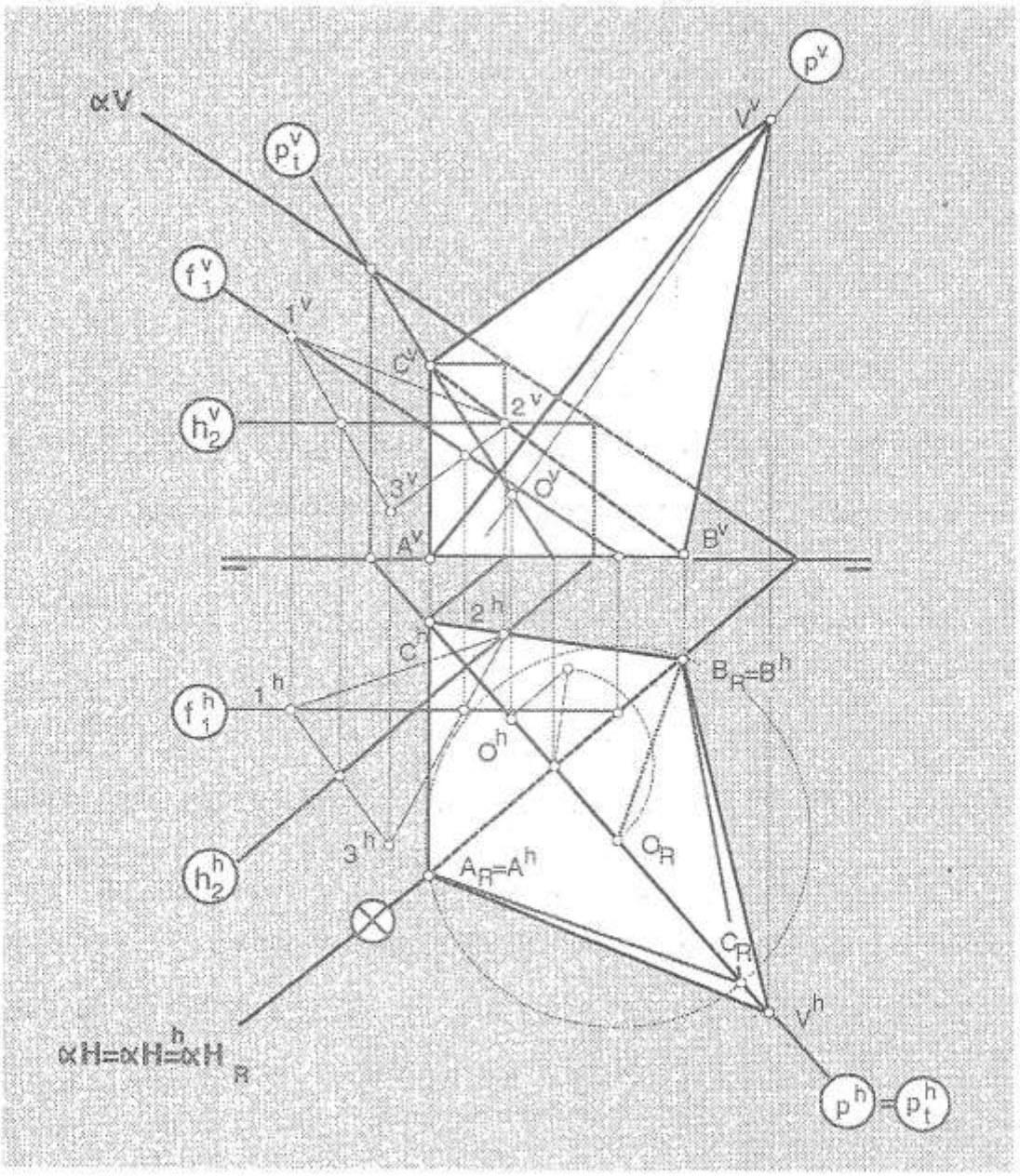


Esta representación tridimensional del problema propuesto nos permite percibir las relaciones existentes entre los datos (plano α y punto V) y la Pirámide Recta Regular de Base Triangular Equilatera en una posición acorde con el enunciado.

I. METODO ADITIVO

1- Ubicar la posición de las trazas (αH y αV) del plano de la base mediante las rectas características "f_1" y "h_2"

2- Trazar recta perpendicular "p" desde el vértice "V" a dicho plano



3- Determinar la penetración (Centro "O" de la base ABC) de la recta "p" en el plano de la base "α" (Recta Tapada "p_t"). El segmento "VO" constituye la altura de la pirámide.

4- Abatir a "α" mostrando a "O" y a la traza horizontal aH, rebatidas (O_R y aH_R). El hecho de que la arista "AB" se encuentre sobre la traza horizontal "αH" sugiere usar dicha traza como charnela.

5- Construir la Base "ABC" en Verdadero Tamaño "$A_RB_RC_R$" (Geometría Plana: construir triángulo equilátero de centro "O" y un lado sobre la recta αH)

6- Devolverla a doble proyección ortogonal ("$A^hB^hC^h$" y "$A^vB^vC^v$").

7- Unir en ambas proyecciones los vértices A,B y C de la base con el vértice "V" y definir las proyecciones de pirámide

8- Determinar Visibilidad del poliedro.

Esta secuencia de pasos está sujeta a un orden que no puede ser alterado, porque cada resultado parcial es prelativo del paso siguiente, es decir, la ejecución de cada paso se sujeta necesariamente a la culminación del anterior. Por otra parte, cada paso constituye en sí, un procedimiento particular, totalmente independiente de los demás como recurso metodológico, excepción hecha del 4 y el 6 que son parte del mismo instrumento; el rebatimiento. Así pues, a la solución del problema se llega mediante la aplicación de una secuencia de procedimientos parciales.

Naturalmente, nada impide apoyarse en la traza vertical como charnela para efectuar el rebatimiento del plano "α". No obstante, ello implicaría necesariamente transladar la traza horizontal a una posición rebatida, que sería evidentemente distinta de su posición sobre el plano horizontal, sobre el cual la traza horizontal real (αH), su propia proyección horizontal (αH^v) y la misma traza rebatida (αH_R) ocupan exactamente la misma posición. Si bien, operar de este modo no afecta la resolución del problema, lo alarga, pues implica la realización de un trabajo adicional que se evita al proceder como lo hemos explicado en la ilustración de la página precedente.

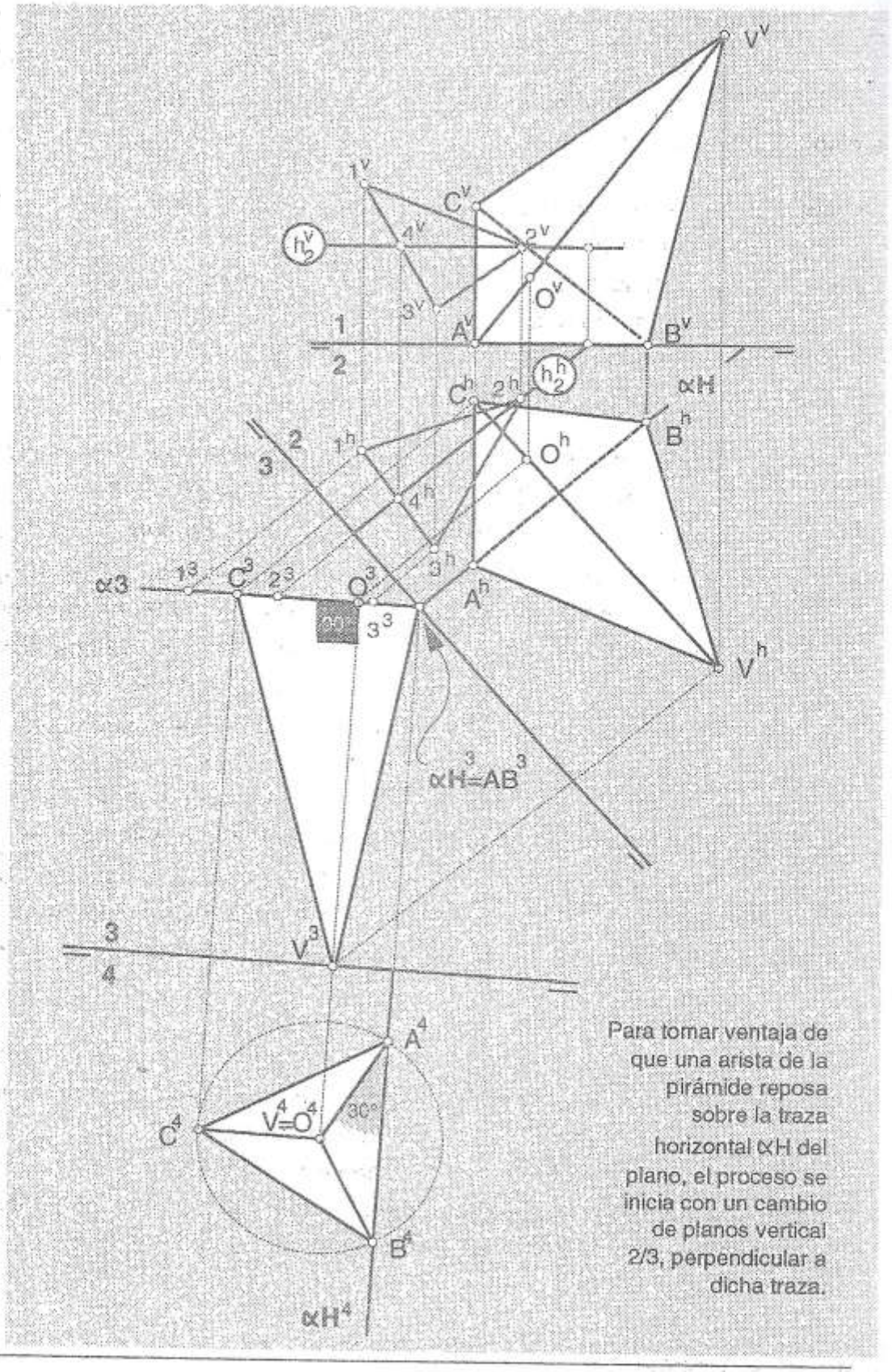
II. METODO INTEGRAL.

Toda vez que la conveniencia de iniciar el proceso de resolución moviendo uno cualquiera de los dos planos de proyección depende de las condiciones establecidas por el problema, es prudente analizar cuidadosamente su enunciado y la disposición de los datos para tomar la decisión mas eficiente en este particular.

En este problema es evidente que si la arista AB descansa sobre el plano horizontal de proyección, ella en realidad está contenida sobre la traza horizontal "αH" del plano "α" y es, por la misma razón que decidimos rebatir alrededor de la traza horizontal al aplicar el método aditivo, que en este caso nos conviene dar inicio al proceso con un cambio del plano vertical (LT 2/3), y proceder como lo veremos seguidamente.

1- Un cambio de punto de vista tal que nos permita ver al plano "α" en una posición de canto, es decir, como una línea, nos presentará la pirámide en una posición notable de modo que su altura H se revelará en Verdadero Tamaño. Así pues, transformamos el plano de la base "α" en Proyectante Vertical mediante el cambio del plano vertical LT 2/3, perpendicular a la traza horizontal aH. En la nueva proyección "3" observamos el VT de la distancia entre "V" y el plano "α", —el cual se muestra de canto a través de su traza proyectante α3— de modo que la pirámide nos ofrecerá el VT de su altura "VO", mientras su base ABC se verá como una linea confundida con "α3". Observe que la determinación del centro "O^3" de la base es accesible al trazar una perpendicular desde el punto "V^3" hasta la traza α3. Por otra parte, la arista AB la cual está ubicada sobre la traza horizontal αH, aparece revelada en forma inmediata en la proyección 3, donde tanto dicha traza como la arista mencionada aparecen confundidas en el punto $\alpha H^3 = AB^3$ sobre LT 2/3.

2- Si ahora nos colocásemos frente al plano "α" en una posición en la cual nuestra visual tenga una dirección perpendicular a él, cualquier elemento que dicho plano contenga se revelará en Verdadero Tamaño y podremos construir la base ABC del poliedro en su magnitud real. Ello será posible al transformar dicho plano en Horizontal mediante el cambio de plano LT 3/4, paralelo a "α3". Mientras en esta proyección, la altura "VO" es vista como



Para tomar ventaja de que una arista de la pirámide reposa sobre la traza horizontal αH del plano, el proceso se inicia con un cambio de planos vertical 2/3, perpendicular a dicha traza.

un punto ($V^4=O^4$), la base ABC de la pirámide cuya arista AB descansa sobre la recta αH , es vista en VT ($A^4B^4C^4$), lo cual hace posible que su construcción pueda abordarse con los procedimientos de la geometría plana (construir triángulo equilátero de centro "O^4" y un lado sobre la recta αH^4).

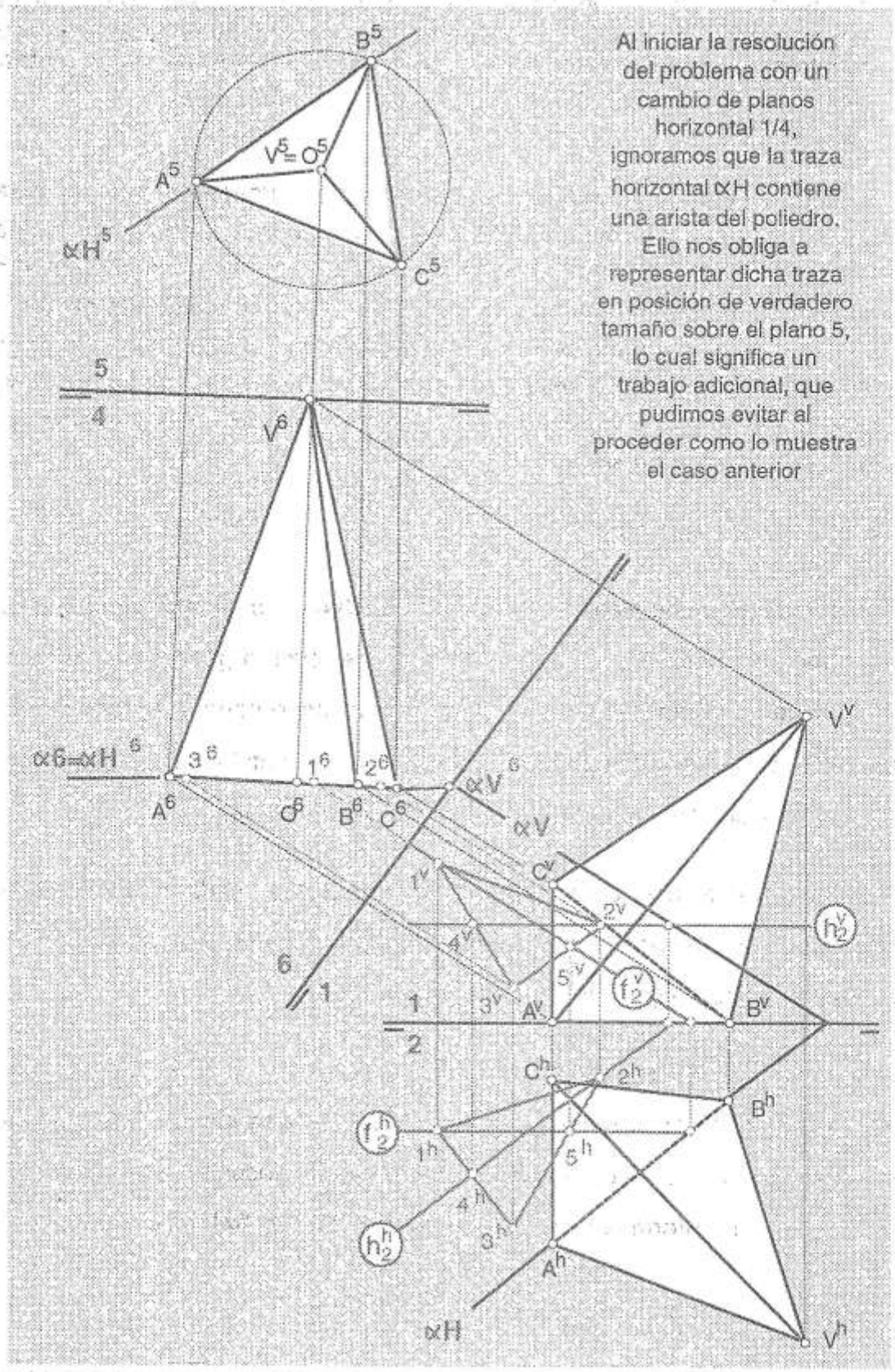
3- Esta última proyección (4) se conjuga con la imagen previa (3) para entregarnos la pirámide totalmente determinada con respecto al sistema secundario 3/4, lo cual es obvio al observar que todos los puntos que la definen (A, B, C y V) están expresados en ambas proyecciones de dicho sistema. Para obtener las proyecciones principales, solo es necesario devolver los puntos obtenidos al sistema principal LT 1/2 mediante el trazado de líneas de referencia y el transporte respectivo de los vuelos y las cotas correspondientes a cada punto.

4- Determinar visibilidad.

La secuencia de cambios de plano LT 1/2, LT 2/3, LT 3/4, la cual es la expresión de nuestros cambios de posición como observadores del evento geométrico, permite construir las nuevas imágenes de la pirámide que se presenta en posiciones notables en el sistema secundario LT 3/4 (ver Posiciones Notables de la Pirámide), fácilmente tratables con las herramientas de la Geometría Plana.

De igual forma que lo aclaramos al aplicar el método aditivo, nada impide resolver el problema iniciando el proceso mediante un cambio de planos horizontal LT 1/6, como lo muestra la figura siguiente.

Observe, sin embargo, que el traslado de la recta "αH" a la proyección "5" sería mas laborioso pues, mientras en el ejemplo anterior, dicha recta se comporta como una recta DE PUNTA de cota cero con respecto a los sistemas secundarios LT 2/3 y LT 3/4 (ello facilita la determinación de sus proyecciónes "αH^3" y "αH^4"), el



Al iniciar la resolución del problema con un cambio de planos horizontal 1/4, ignoramos que la traza horizontal αH contiene una arista del poliedro. Ello nos obliga a representar dicha traza en posición de verdadero tamaño sobre el plano 5, lo cual significa un trabajo adicional, que pudimos evitar al proceder como lo muestra el caso anterior

comportamiento de la misma con respecto a los sistemas LT 1/6 y LT 6/5 sería, respectivamente, el de una recta CUALQUIERA y una recta FRONTAL, lo cual implica trabajo mayor en la determinación de sus proyecciones "αH^6" y "αH^5".

Es de hacer notar que la decisión de escoger la vía mas económica, redunda directamente en la precisión de la solución obtenida, al permitir acortar el proceso de resolución. Recuerde que en la resolución de problemas gráficos, siempre la vía más corta es la mas precisa.

LAS VARIABLES CONSTRUCTIVAS

En general, la aplicación del Cambio de Planos a la construcción de poliedros exige diferenciar tres VARIABLES CONSTRUCTIVAS fundamentales a saber: la variable MORFOLOGICA, la variable DIMENSIONAL, y la variable POSICIONAL, las cuales siempre intervienen en el enunciado de todos los problemas.

Estas variables pueden ser EXPLICITAS, cuando están directamente enunciadas en forma verbal, como ocurre siempre con la variable morfológica, la cual nos describe la forma del sólido que vamos a determinar; o IMPLICITAS cuando no son obvias y tan solo pueden determinarse mediante relaciones que podemos establecer entre los datos del problema. En este, en particular, la variable morfológica (explícita) describe la apariencia del objeto (Pirámide Recta Regular de Base Triangular Equilátera), la variable dimensional involucra aquellas relaciones que podemos establecer a partir de los elementos conocidos en los datos para determinar las magnitudes de los distintos componentes del poliedro, por tanto es implícita (la distancia entre "V" y el plano "α" revela la altura "VO" del poliedro, y el tamaño de la base "ABC" nace de la relación entre "O" y "αH"), y la variable posicional, la cual es explícita, nos informa acerca de posición particular del poliedro (el vértice principal está en "V" y un lado de la base (AB) está en el plano horizontal de proyección, es decir, sobre "αH").

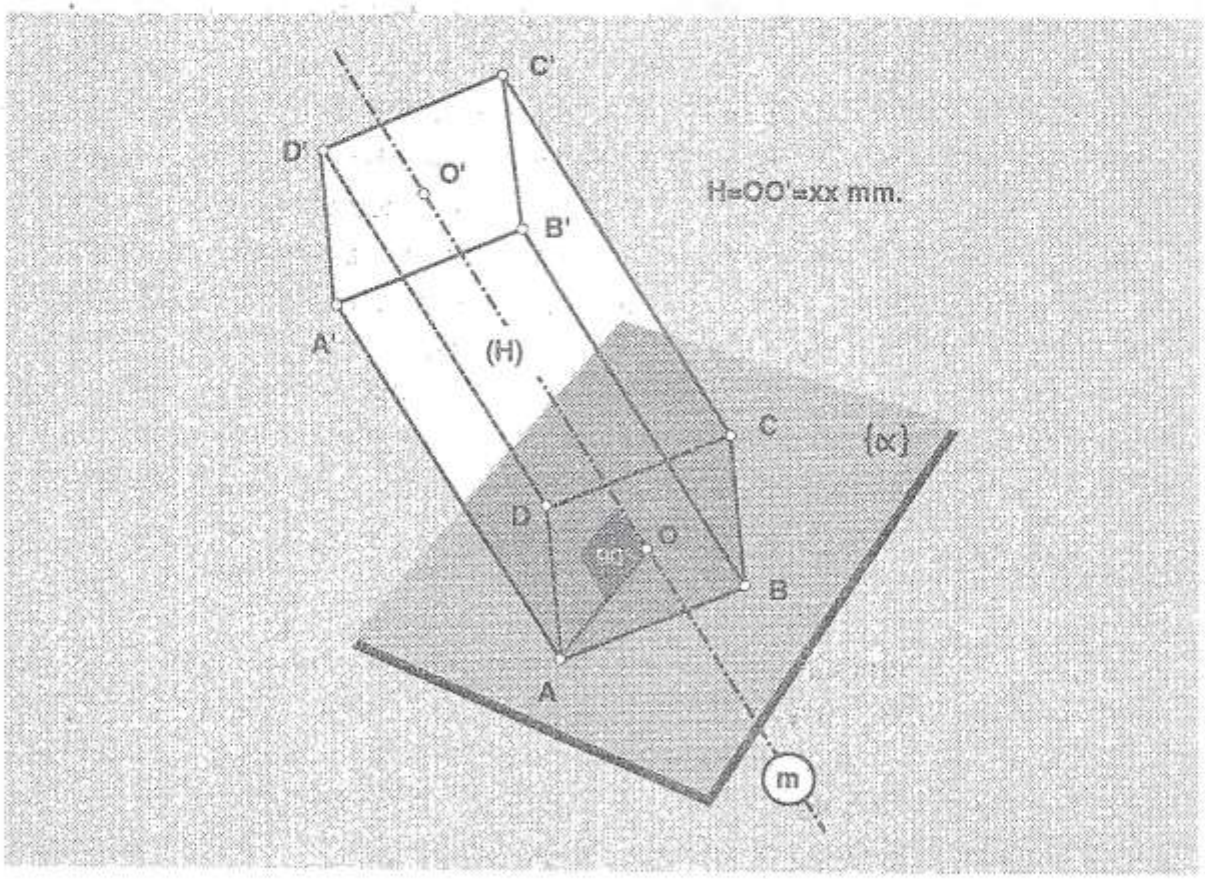
Toda vez que, a diferencia de lo que ocurre en los poliedros regulares, en los sólidos rectos (prismas y pirámides) no existe una relación fija de proporcionalidad entre la altura "H" y el tamaño de la base, la variable dimensional en este caso debe proporcionar suficiente información (explícita o implícita) para determinar las magnitudes de ambos elementos. Recuerde que en los sólidos regulares, debido a las relaciones de proporcionalidad que afectan la totalidad de esos cuerpos, sólo

es necesario conocer la longitud de alguno de sus elementos, para tener acceso a las magnitudes de los demás.

El cuidadoso análisis del enunciado de los problemas nos permitirá determinar la calidad, si explícita o implícita de tales variables, y establecer anticipadamente el orden y ubicación de los distintos cambios de plano que requerimos aplicar para obtener la solución al problema o, en otro caso, anticipar si el mismo no tiene solución sin necesidad de proceder a resolverlo. El manejo de las variables constructivas representa un valioso instrumento de análisis tridimensional, de imprescindible utilidad cuando abordamos dicho análisis con los recursos de la metodología integral.

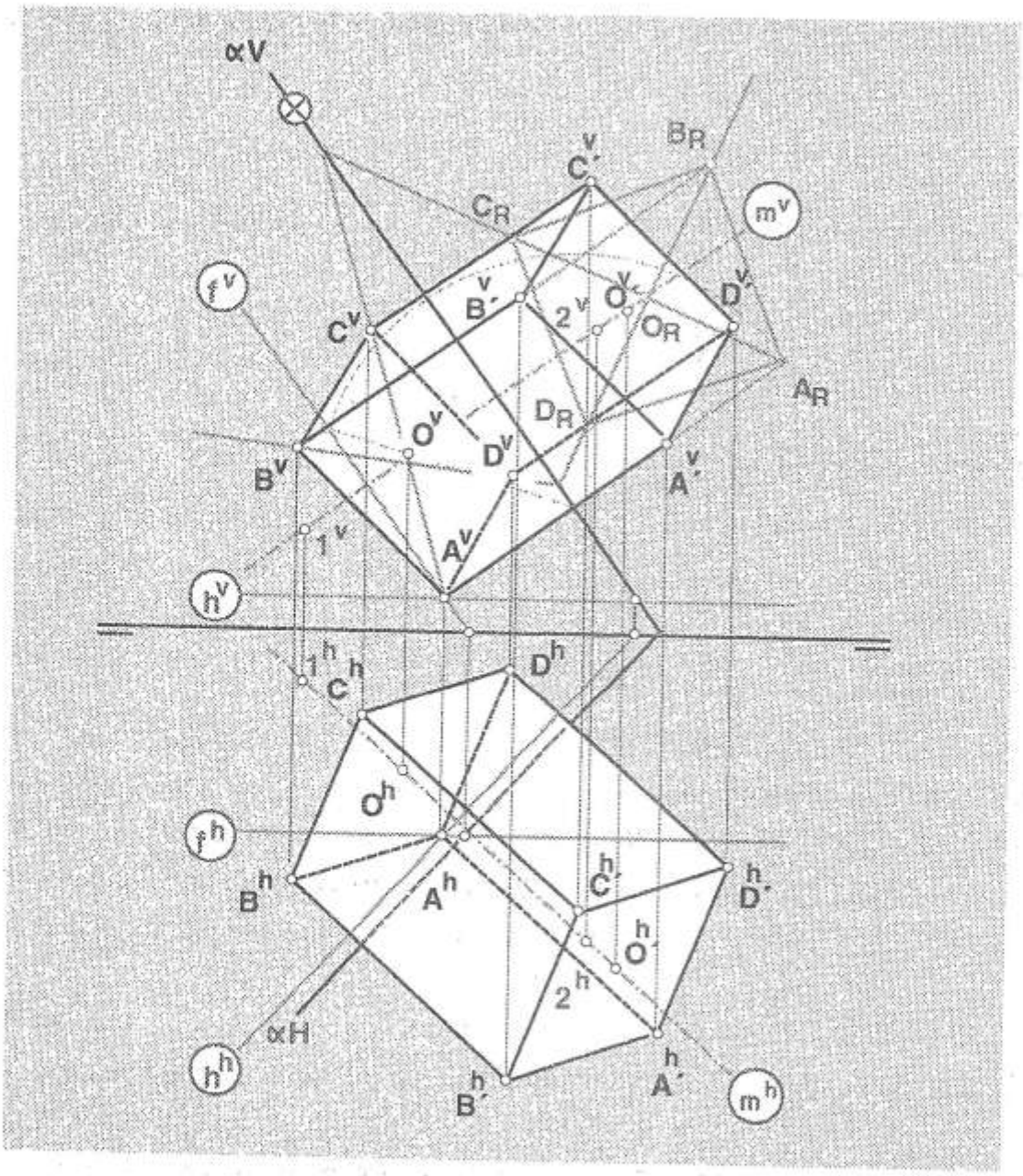
Veamos otro problema sencillo.

LA RECTA "m" (1,2) REPRESENTA AL EJE DE UN PRISMA RECTO REGULAR DE BASE CUADRADA ABCD DE XX mm. DE ALTURA, CUYO VÉRTICE DE MENOR COTA ES "A". DETERMINE LAS PROYECCIONES DEL POLIEDRO.



METODO ADITIVO

1.- Trazar por "A" un plano "α" perpendicular a la recta "m" mediante las rectas características "h" y "f".



2.- Penetrar la recta "m" en el plano "α"., punto que representa al centro "O" de la base correspondiente.

3.- Buscar una dirección de verdadero tamaño de la recta "m" y llevar sobre ella la

magnitud de la altura.

4.- Devolver la altura a proyecciones y determinar el segmento OO'.

5.- Abatir al plano "α" y construir la base $A_RB_RC_RD_R$ en verdadero tamaño sobre el plano rebatido.

6.- Rebatir (devolver) la base inferior a proyecciones.

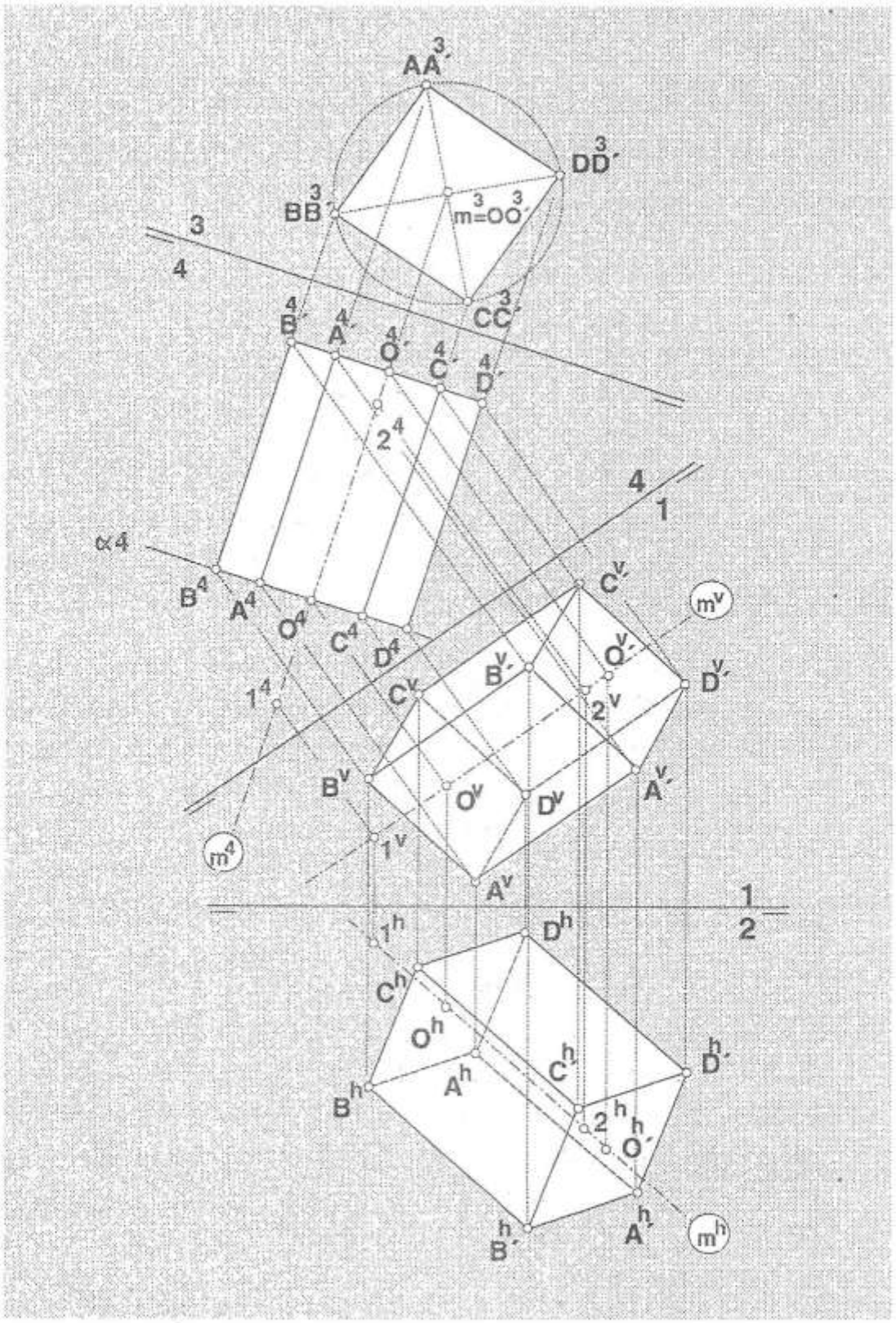
7.- Determinar las proyecciones de la base superior A'B'C'D' y definir el poliedro

8.- Determinar la visibilidad

METODO INTEGRAL

Debido a que la variable posicional no involucra a los planos de proyección, ni a otro elemento contenido en ellos, no existe condición que favorezca preferencia alguna en cuanto a la selección del primer cambio de planos, de modo que podemos iniciar el proceso moviendo uno cualquiera de los dos planos de proyección.

Sin embargo, dediquemos un momento al análisis de las variables constructivas de este problema. La variable morfológica es, como siempre, explícita pues el mismo problema nos indica que vamos a determinar un Prisma Recto Regular de Base Cuadrada. La variable dimensional debe ser discriminada, toda vez que se refiere por separado a la altura del poliedro y a las dimensiones de la base. Es obvio que la primera nos viene dada en forma explícita, ya que se nos indica verbalmente la magnitud de la altura del prisma (xx mm.). No ocurre lo mismo con la magnitud de la base, la cual no está enunciada pero es deducible a partir de la distancia entre el punto "A" y la recta "m", por tanto es una variable implícita. La variable posicional es explícita, pues al indicarnos que el punto "A" es el de menor cota del poliedro, el resto de los vértices que lo definen deben necesariamente quedar por encima de dicho punto, negando efectivamente la posibilidad de que alguno de ellos tenga menor cota que "A".


AA'3
DD'3
BB'3
m3=OO'3
3
4
B'4
A'4
O'4
C'4
D'4
24
4
1
α4
B4
A4
O4
C4
D4
14
C'v
mv
O'v
B'v
D'v
Cv
2v
Bv
Ov
Dv
A'v
m4
1v
Av
1
2
1h
Dh
Ch
Oh
Ch
D'h
Bh
Ah
2h
O'h
A'h
B'h
mh

Prosigamos entonces iniciando el proceso con un cambio de planos horizontal, como está ilustrado en la página anterior.

1.- Un CP horizontal paralelo a la recta se expresa al trazar la LT 1/4 paralela a la proyección vertical "m^V" de la recta "m", y la convierte en una recta HORIZONTAL . Así, la nueva proyección "m^4" de dicha recta aparece en VT, de modo que cualquier plano que como "a" le sea perpendicular será visto en posición de proyectante con respecto al nuevo sistema, mostrando su traza proyectante "α^4" precisamente en esta nueva proyección, en una posición perpendicular a "m^4". Toda vez que dicho plano contiene al punto "A", necesariamente la traza proyectante "α^4" deberá contener la proyección "A4" de dicho punto. La intersección de la traza proyectante "α^4" con la proyección "m^4" de la recta determina en forma inmediata el punto "O^4", centro de la base "ABCD", la cual será visible como "$A^4B^4C^4D^4$" confundida con la traza "α^4".

2.- El desplazamiento del plano vertical "1" sobre el plano horizontal "4" a una nueva posición "3" tal, que la nueva linea de tierra LT 4/3 sea paralela a la traza proyectante "α^4", nos permitirá ver en Verdadero Tamaño a todos los elementos contenidos en del plano "α". La recta "m" aparece como un punto (m^3) donde se confunden también los puntos "O^3" y "O'^3", centros de las bases del prisma. De esta manera, la construcción del cuadrado de las bases puede realizarse directamente como un problema de geometría plana donde se conoce el centro "O" y un vértice "A". Note que en virtud de la posición del eje "OO'^3", los vértices de ambas bases quedan respectivamente confundidos en las proyecciones "AA'^3", "BB'^3", "CC'^3" y "DD'^3". Al establecer las proyecciones del prisma con respecto al sistema secundario LT 4/3, como lo hemos hecho, tenemos al poliedro totalmente determinado en Doble Proyección Ortogonal, de manera que su ubicación en las proyecciones principales consiste sencillamente en el traslado de las cotas y los vuelos respectivos a través de las líneas de referencia correspondientes.

3.- Determinación de la visibilidad

EL POLIEDRO SE MUEVE EN EL ESPACIO. GRADOS DE LIBERTAD.

Una manera útil de concebir la resolución de un problema dentro del contexto del método integral, consiste en imaginar al objeto buscado moviéndose en el espacio hasta "calzarse" sobre los datos dados, lo cual nos permite comprender con mas agudeza la naturaleza del comportamiento de la variable posicional en el contexto del problema considerado.

Todo problema nos exige siempre determinar las proyecciones de un poliedro que se encuentra en una determinada posición, inmóvil, atado a los datos que lo obligan a ocupar esa y sólo esa posición. Puede ocurrir, sin embargo, que algunos problemas permitan dos, tres y hasta más soluciones. Cuando un problema tiene muchas, infinitas soluciones, es generalmente la variable posicional la que se ve afectada, mientras la variable dimensional no participa. El sólido puede ocupar una posición cualquiera, es decir, tiene toda la libertad de ubicarse en cualquier lugar del espacio y orientarse libremente en él. De este modo, el proceso de resolución consiste en reducir progresivamente la capacidad de movimiento del poliedro, hasta detenerlo en la posición que nos require el enunciado. Por lo general, sin embargo, el enunciado siempre ofrece información suficiente para restringir la respuesta a una sola solución.

La idea que soporta este concepto es muy sencilla. Cualquier sistema de ejes coordenados ortogonales, que sirva de referencia para ubicar los elementos geométricos en el espacio diédrico, tambien se comporta como referencia para descomponer el movimiento de dichos objetos en el mismo espacio. Así, si un cuerpo cualquiera se desplaza entre dos posiciones en el espacio tridimensional, en el espacio diédrico, ese movimiento se refleja en una variación relativa de las coordenadas X, Y y Z, es decir, del origen, del vuelo y de la cota.

Un punto fijo en el espacio, no tiene libertad de movimiento, está atrapado en una sola posición. En el espacio diédrico, lo referimos a un sistema de coordenadas

cartesianas (X, Y, Z), con respecto a las cuales se establecen respectivamente su origen (Dx), su vuelo (Dy) y su cota (Dz). Si le permitimos desplazarse en una dirección paralela a uno de los ejes, por ejemplo, al eje "X", le conferimos un grado de libertad; puede moverse a lo largo de una línea recta, lo cual refleja una variación de su origen mientras su cota y su vuelo permanecen estables. Si además, le ofrecemos la posibilidad de desplazarse a lo largo de otro eje, digamos como "Y", le otorgamos un grado de libertad adicional, y el punto disfruta ahora de dos grados de libertad, que le permiten desplazarse en el espacio dentro de los límites de una superficie plana paralela a los ejes "X" e "Y", es decir, puede variar su origen y su vuelo, manteniendo su cota fija. Cuando, por último, le dejamos moverse también a lo largo del eje "Z", el punto disfruta de tres grados de libertad y puede ubicarse sin restricciones en cualquier lugar del espacio tridimensional. Es fácil intuir que, en general, un solo grado de libertad se asocia a la línea recta, mientras que dos se asocian al plano, y tres al espacio tridimensional.

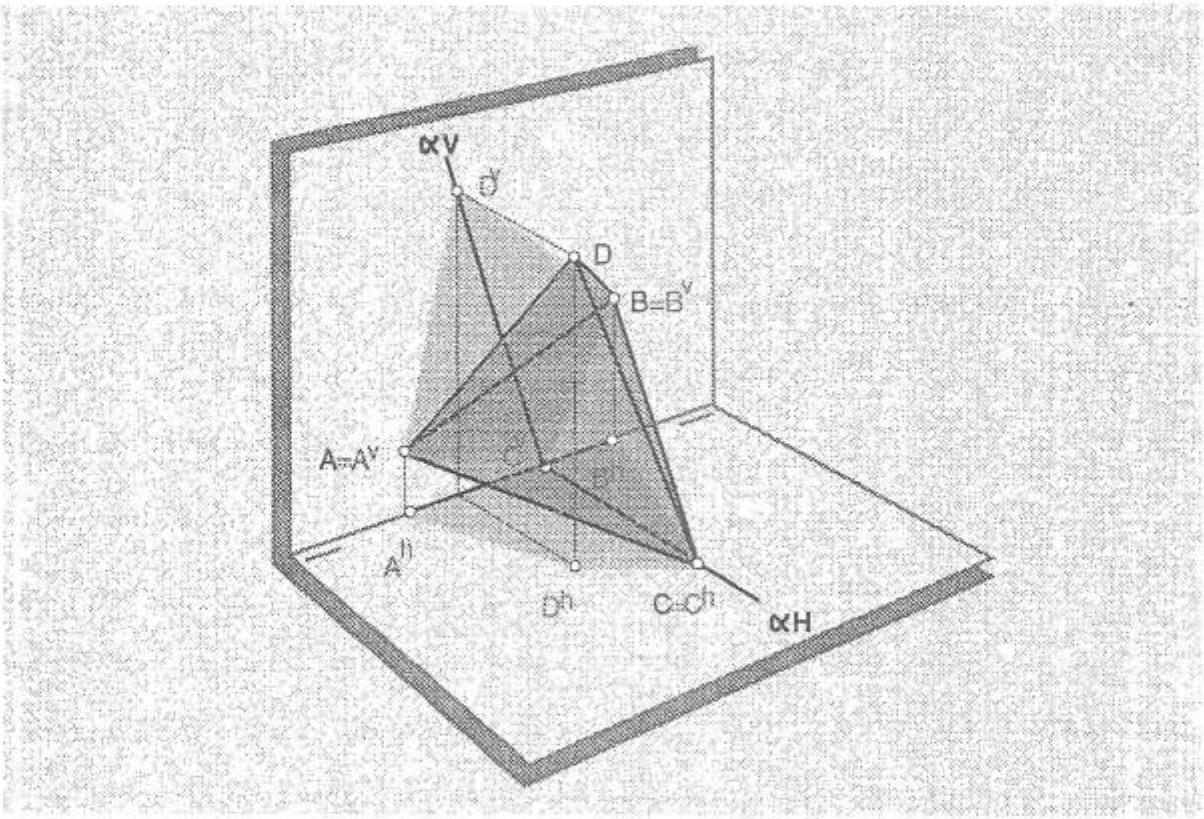
Este concepto puede no sólo transferirse a cualquier objeto que se encuentre en el espacio, sino que, cuando se trata de construir poliedros por el método integral, el movimiento impreso al objeto debe necesariamente referirse a tres direcciones ortogonales que se establecen a conveniencia según las condiciones particulares que, en el problema considerado, afectan al sólido buscado. Nunca se utiliza para ello el sistema de ejes coordenados a los cuales se refieren originalmente las posiciones de los puntos dados como datos en el problema.

La cantidad de soluciones posibles a los problemas de construcción de poliedros, está invariablemente asociada al número de grados de libertad al que esté sometido el objeto. Así, si el enunciado nos sugiere que un objeto no tiene libertad de movimiento, es decir tiene todos sus grados de libertad restringidos (por ejemplo, cuando nos piden construir un tetraedro del cual conocemos las proyecciones de las rectas que contienen dos de sus aristas opuestas) tan solo es posible una sola solución; el poliedro está calzado sobre los datos, y no se puede

mover; no tiene grados de libertad. En el otro extremo, por ejemplo, pudiesen pedirnos determinar las proyecciones de un cubo de magnitud conocida del que sólo nos dicen que tiene una arista contenida, por ejemplo, en la recta "g". Obviamente son posibles infinitas soluciones, y nos encontraríamos frente a un problema donde el poliedro tiene tres grados de libertad, y , paradójicamente, no tiene solución.

Veámos, por ejemplo, la situación que se presenta en el problema siguiente.

"AB" ES UNA ARISTA DE UN TETRAEDRO "ABDC" CUYO VÉRTICE DE MENOR COTA "C" ESTA EN EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCION. DETERMINE LAS PROYECCIONES DEL POLIEDRO. A (X, 00, Z); B (X, 00, Z).



En primer lugar analizamos la calidad de las variables constructivas y percibimos que la variable dimensional está implícita en la magnitud -conocida- de la arista "AB", a partir de la cual obtenemos las dimensiones de los distintos elementos del poliedro, localizables a través de la Sección Principal. La determinación de la

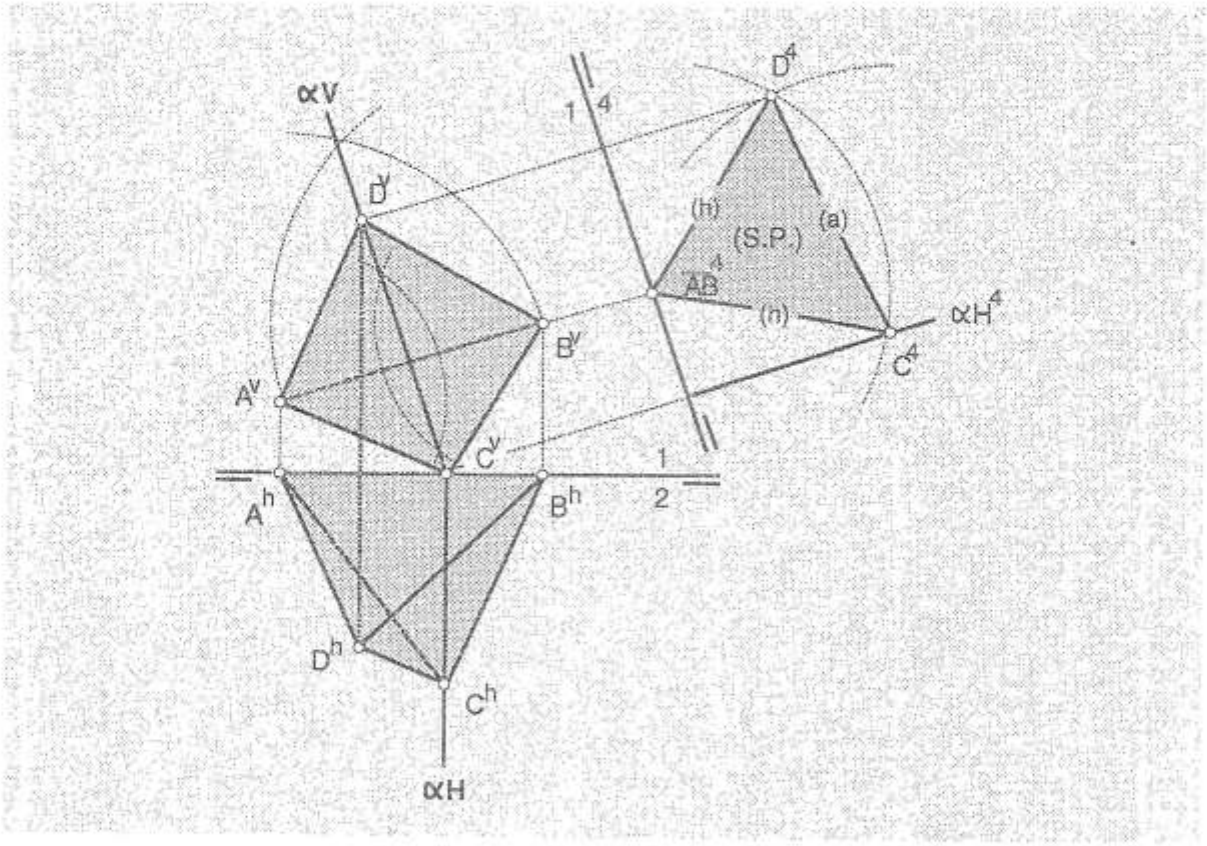
variable posicional, motivo de nuestro problema, la explicamos a continuación.

El segmento AB, arista del Tetraedro está ubicado en el plano Vertical de Proyección y se comporta como una recta FRONTAL de vuelo cero. Podríamos imaginar al poliedro "calzado" sobre dicha arista, de manera que, en estas condiciones, el sólido está impedido de moverse a lo largo de la dirección señalada por el segmento "AB", y estando "anclado" a él, sólo dispone de la posibilidad de girar a su alrededor, teniendo por tanto, sólo dos grados de libertad. Fíjese muy bien que la pauta para establecer la posición de los ejes ortogonales a los cuales referimos la libertad del objeto está dada por la dirección marcada por el segmento "AB", al cual asociamos uno de dichos ejes.

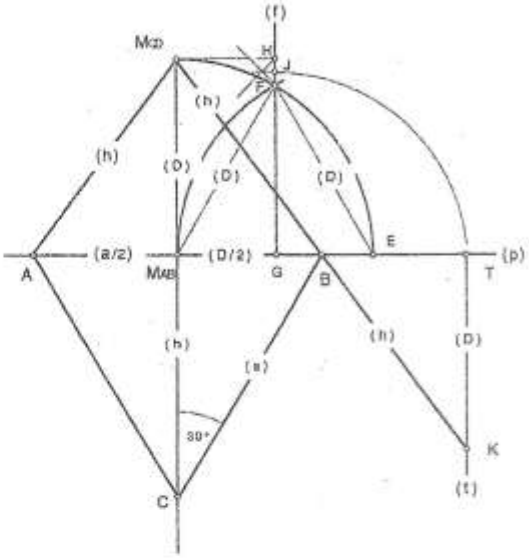
De los cuatro vértices del tetraedro, dos de ellos (A y B) están fijos mientras que los restantes (C y D) giran alrededor del segmento definido por aquellos. Cada vez que el poliedro describe una trayectoria de 360º, el vértice "C" pasa una vez por el plano horizontal de proyección, de manera que en ese preciso instante, cuando la cota del punto "C" alcanza una magnitud nula, el tetraedro ocupa la posición que nos requiere el enunciado y el poliedro pierde todos sus grados de libertad. La trayectoria que dichos puntos realizan es una circunferencia contenida en un plano perpendicular al segmento "AB", cuyo radio es igual a una altura de cara (h).

La aplicación del método integral nos sugiere de inmediato iniciarlo con un cambio de planos LT 1/4, perpendicular a la proyección vertical del segmento AB, lo cual lo convierte en una recta DE PIE de vuelo cero, cuya proyección "AB^4" es un punto. La nueva proyección "4" nos muestra al tetraedro en la posición notable que revela

su sección principal en verdadero tamaño, ubicada de modo que el vértice "C" descansa en el plano horizontal de proyección, precisamente sobre la traza horizontal del plano que contiene dicha sección principal, la cual aparece indicada por su proyección "αH^4". Desde esta proyección, las imágenes "C^4" y "D^4" de los vértices localizados pueden referirse al sistema principal LT 1/2, y determinar las proyecciones correspondientes y la visibilidad del tetraedro.



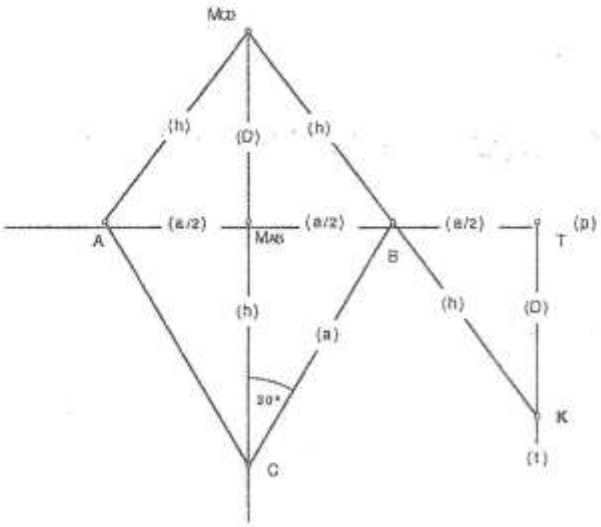
PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR LA SECCION PRINCIPAL DE UN TETRAEDRO CUANDO SE CONOCE LA DISTANCIA (D) "MAB-MCD" ENTRE DOS DE SUS ARISTAS OPUESTAS



1- Por MAB trace una perpendicular (p) a la distancia (D).
2- Con radio (D) y centro MAB, trace un arco que corte a la recta (p) en "E".
3- Con radio (D) y centro "E", trace un arco que corte al arco anterior en "F".
4- Por "F" trace la perpendicular (f) a la recta (p) y encuentre el punto "G" de intersección entre ambas.
5- Por MCD trace una paralela a la recta (p) y encuentre el punto "H" de intersección con la recta (f).
6- Determine el punto medio "J" del segmento "FH".
7- Con centro en "G" y radio "JG" corte la recta "p" en el punto "T".
8- Trace por "T" la recta (t) perpendicular a la recta (p).
9- A partir de "T" copie sobre la recta (t) la distancia (D) y encuentre el punto "K".
10- Una los puntos "K" y "MCD" y encuentre el punto "B" sobre la recta (p).
11- Con centro en "MAB" y radio "BMAB" determine el punto "A" sobre la recta (p)

12- ABMCD es la Sección Principal buscada

DETERMINACION DE MAGNITUDES DE LOS ELEMENTOS ASOCIADOS AL METODO EN UNA SECCION PRINCIPAL REAL DE UN TETRAEDRO



tan 30 ° = 0,5 a/h = 0,5773
h = 0,5 a/0,5773 = 0,8661a
h = 0,8661 a

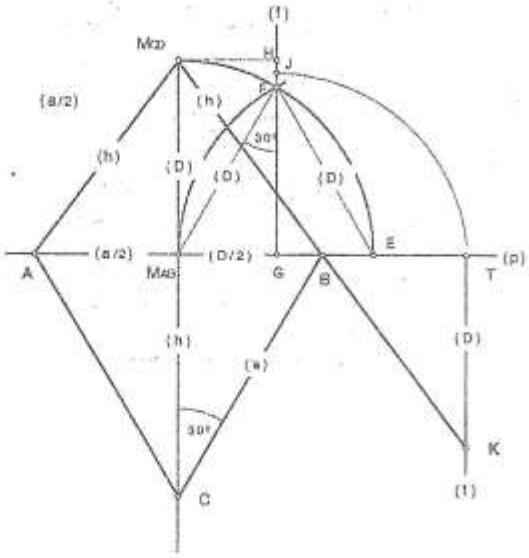
$(D) = \sqrt{(h)^2 - (0,5a)^2}$
$(D) = \sqrt{(0,8661a)^2 - (0,5a)^2}$
$(D) = \sqrt{0,75a - 0,25a} = \sqrt{0,5}\ a$
(D) = 0,7071a

TMAB = 2(0,5 a) = a
TK= (D)
KMCD= 2h = 1.7322 a

TB = 0,5 a
KB = 0,8661 a

11. APENDICE I

DETERMINACION DE MAGNITUDES DE LOS ELEMENTOS OBTENIDOS AL APLICAR EL METODO



En el triángulo equilátero ABC (cara del tetraedro) se cumple:

$h = 0{,}5a/tg\ 30^\circ = 0{,}5a/0{,}5773 = 0{,}8661a$

$h = 0{,}8661a$

En la Sección Principal ABMCD se cumple:

$D = \sqrt{h^2 - 0{,}5\ a^2} = \sqrt{0{,}8661\ a^2 - 0{,}5\ a^2}$

$D = \sqrt{0{,}75\ a - 0{,}25\ a}$

$D = \sqrt{0{,}5\ a} = 0{,}7071a;\ D = 0{,}7071a$

En el triángulo EFMAB se cumple:

$GF = 0{,}5\ D/tg\ 30^\circ = 0{,}5(0{,}7071a)/0{,}5773 = 0{,}6124\ a;$

$GF = 0{,}6124\ a$

$FH = GH - GF = (D) - GF = 0{,}7071a - 0{,}6124\ a = 0{,}0946\ a$

$JF = 0{,}5\ FH = 0{,}5(0{,}0946\ a) = 0{,}0473\ a;\ JF = 0{,}0473\ a$

$GJ = GF + JF = 0{,}6124\ a + 0{,}0473\ a = 0{,}6597\ a;$

$GJ = 0{,}6597\ a$

$AT = 0{,}5\ a + 0{,}5\ D + GJ = 0{,}5\ a + 0{,}3535\ a + 0{,}6597\ a$

$AT = 1{,}5132\ a$

$TMAB = GMAB + GT = 0{,}5D + GF + JF =$

$TMAB = 0{,}5(0{,}7071\ a) + 0{,}6124\ a + 0{,}0473\ a$

$TMAB = 1{,}0132\ a$

$TB = TMAB/2 = 0{,}5066\ a$

$TB = 0{,}5066\ a$

$KB = \sqrt{KT^2 - TB^2} = \sqrt{0{,}7071\ a^2 - 0{,}5066\ a^2}$

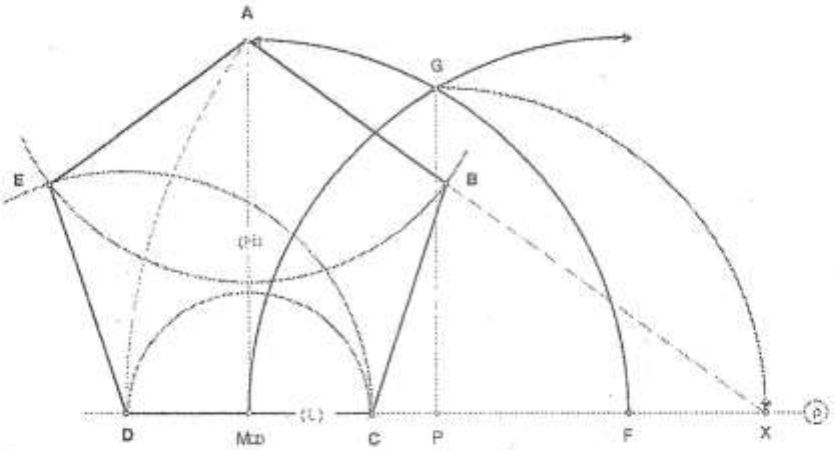
$KB = \sqrt{0{,}4999\ a - 0{,}2566\ a} = \sqrt{0{,}7565\ a} = 0{,}8697\ a$

$KB = 0{,}8697\ a$

VERIFICACION DE LA PRECISION DEL PROCEDIMIENTO POR COMPARACION DE LOS VALORES OBTENIDOS

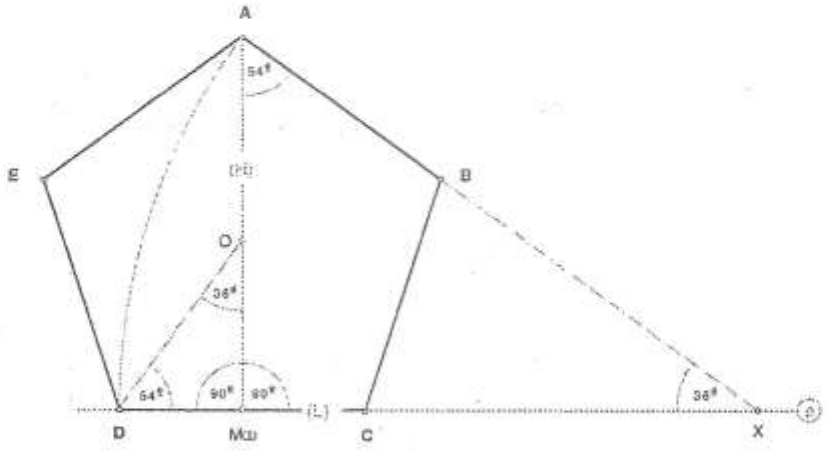
VALORES EN SECCION PRINCIPAL REAL	0,5 a	0,8661 a
VALORES OBTENIDOS POR EL METODO	0,5066 a	0,8697 a
DIFERENCIA	0.0066 a	0.0036 a
PRECISION	96.69 %	99.58 %

PRECISION PROMEDIO = 99,63%



CONSTRUCCION DE UN PENTAGONO DEL CUAL SE CONOCE SU ALTURA (H) A-MCD

1- POR EL EXTREMO "MCD" TRACE LA PERPENDICULAR "p".
2- CON CENTRO EN EL PUNTO "MCD" Y RADIO "AMCD" TRACE UN ARCO QUE CORTE A LA RECTA "p" EN EL PUNTO "P".
3- CON CENTRO EN EL PUNTO "P" Y RADIO "A-MCD" TRACE UN ARCO QUE CORTE AL ARCO ANTERIOR EN EL PUNTO "G".
4- DETERMINE EL PUNTO "P" TRAZANDO POR "G" EL SEGMENTO " PG", PERPENDICULAR A "p".
5- CON CENTRO EN "P" Y RADIO "PG", TRACE UN ARCO QUE CORTE A "p" EN EL PUNTO "X".
6- UNA EL PUNTO "X" CON EL VERTICE "A" DEL PENTAGONO MEDIANTE EL SEGMENTO "XA".
7- CON CENTRO EN EN EL PUNTO "X" Y RADIO "XA", CORTE A LA RECTA "p" Y ENCUENTRE EL VERTICE "D" DEL PENTAGONO.
8- COPIE LA DISTANCIA "DMCD" SOBRE LA RECTA "p" A LA DERECHA DEL PUNTO "MCD" Y ENCUENTRE EL VERTICE "C" DEL PENTAGONO.
9- TRANSLADE LA MAGNITUD "CD" A PARTIR DE "A" SOBRE LA RECTA "XA" Y ENCUENTRE AL VERTICE "B" DEL PENTAGONO.
10- HACIENDO CENTRO EN LOS VERTICES "A" Y "D" CON RADIO "CD" TRACE DOS ARCOS Y DETERMINE EL VERTICE "E"
11- UNA CONSECUTIVAMENTE LOS VERTICES DETERMINADOS Y DEFINA EL PERIMETRO DEL PENTAGONO.



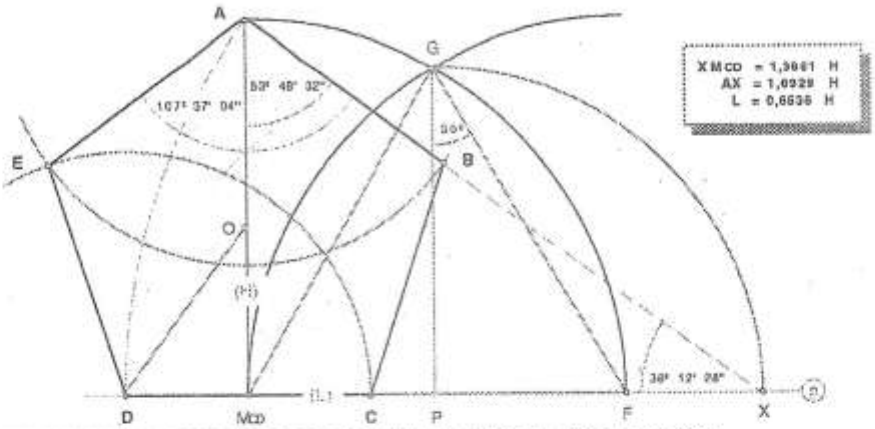
DETERMINACION DE LAS MAGNITUDES DE LOS SEGMENTOS ASOCIADOS AL METODO EN UN PENTAGONO REGULAR

EN LA FIGURA, SE CUMPLE:

XMCD = AMCD / tg 36° = H / 0,7265 = (1/0,7265)H = 1,3764 H ----------->
AX = AMCD/sen 36° = H / 0,5878 = (1/0,5878)H =1,7012 H ----------->
L = DC = 2[(AX)H-(XMCD)H] = 2 (1,7012 H -1,3764 H) = 0,6496 H ------>

XMCD = 1,3764 H
AX = 1,7012 H
L = 0,6496 H

12. APENDICE II



DETERMINACION DE LAS MAGNITUDES DE LOS SEGMENTOS OBTENIDOS AL APLICAR EL METODO.

EN EL PENTAGONO REGULAR CONSTRUIDO AL APLICAR EL METODO, SE CUMPLE:

1- Triángulo equilátero FGMCD: PF=PMCD = H/2; PG = PX = PF/tg 30° = H/2(tg 30°) = H/2(0,5773) = H/1,1546 = 0,8661 H

2- Triángulo rectángulo AXMCD: XMCD = PMCD + PX = H/2 + 0,8661 H = 1,3661 H. Al Aplicar el Teorema de Pitágoras, tenemos:

AX = √(XMCD)² + (AMCD)² = √ (1,3661 H)² + (H)² = √ 1,8662 H + H = √ 2,8662 H = 1,6929 H

3- Determinación del valor aproximado del lado L del pentágono obtenido.

Tenemos que AX=DX. ∴ L= 2(DX-XMCD) = 2(1,6929 H - 1,3661 H) = 2(0,3268) H = 0,6536 H

4- Determinación de los Angulos X y A.

tg X= AMCD/XMCD = H/1,3661 H = 0,7320. Para interpolar este valor, llamemos Δ a a la diferencia angular entre el ángulo mayor y el ángulo buscado. Al interpolar este valor, entre los obtenidos por la tabla de funciones trigonométricas tenemos:

(tg 36° 13' - tg 36° 12')/ 60" =(tg 36° 13' - tg X)/ Δ a,

de donde Δ a = 60" x (tg 36° 13' - tg X)/ (tg 36° 13' - tg 36° 12') = 60" x (0,732336 - 0,732064)/(0,732336-0,731819)

Δ a = 60"x (0,000272)/ (0,000517) = 31,5667". Por aproximación Δ a = 32", de donde **Angulo X= 36° 12' 28"**

Angulo A = 2 x (90° - Angulo X) = 2 x (90° - 36° 12' 28") = 2 x (53° 48' 32") = 107° 37' 04"

VERIFICACION DE LA PRECISION DEL PROCEDIMIENTO POR COMPARACION DE LOS VALORES OBTENIDOS

	XMCD	AX	L
VALORES EN PENTAGONO REAL	1,3764 H	1,7012 H	0,6406 H
VALORES OBTENIDOS POR EL METODO	1,3661 H	1,6929 H	0,6536 H
DIFERENCIA	0,0103 H	0,0083 H	0,004 H
PRECISION	99,25 %	99,51 %	99,38 %

PRECISION PROMEDIO = 99,38 %

BIBLIOGRAFIA

KLINE, Morris
1972
MATHEMATICAL THOUGH FROM ANCIENT TO MODERN TIMES. Oxford University Press. New York.

RISQUEZ, José Manuel.
1974
CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATERIAS GRAFICAS EN EL CICLO BASICO GENERAL. Trabajo de Ascenso a la Categoría de Profesor Asistente. Universidad de los Andes. Facultad de Arquitectura. Mérida. Venezuela

SLABY, Steve
1957
DESCRIPTIVE GEOMETRY. College Outline Series. Barnes & Noble, Inc. New York. Second Printing.

STEWART, Susan
1986
APPLIED DESCRIPTIVE GEOMETRY. Delmar Publishers Inc. New York.